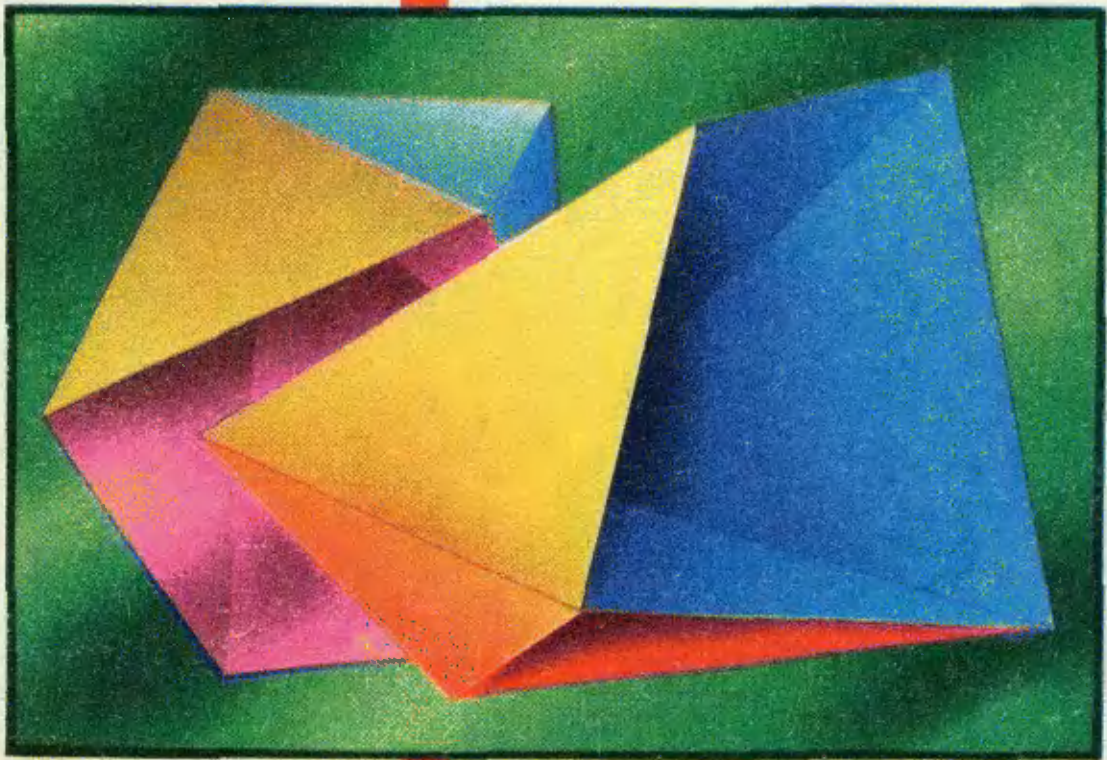


# Квант

Научно-популярный  
физико-математический журнал

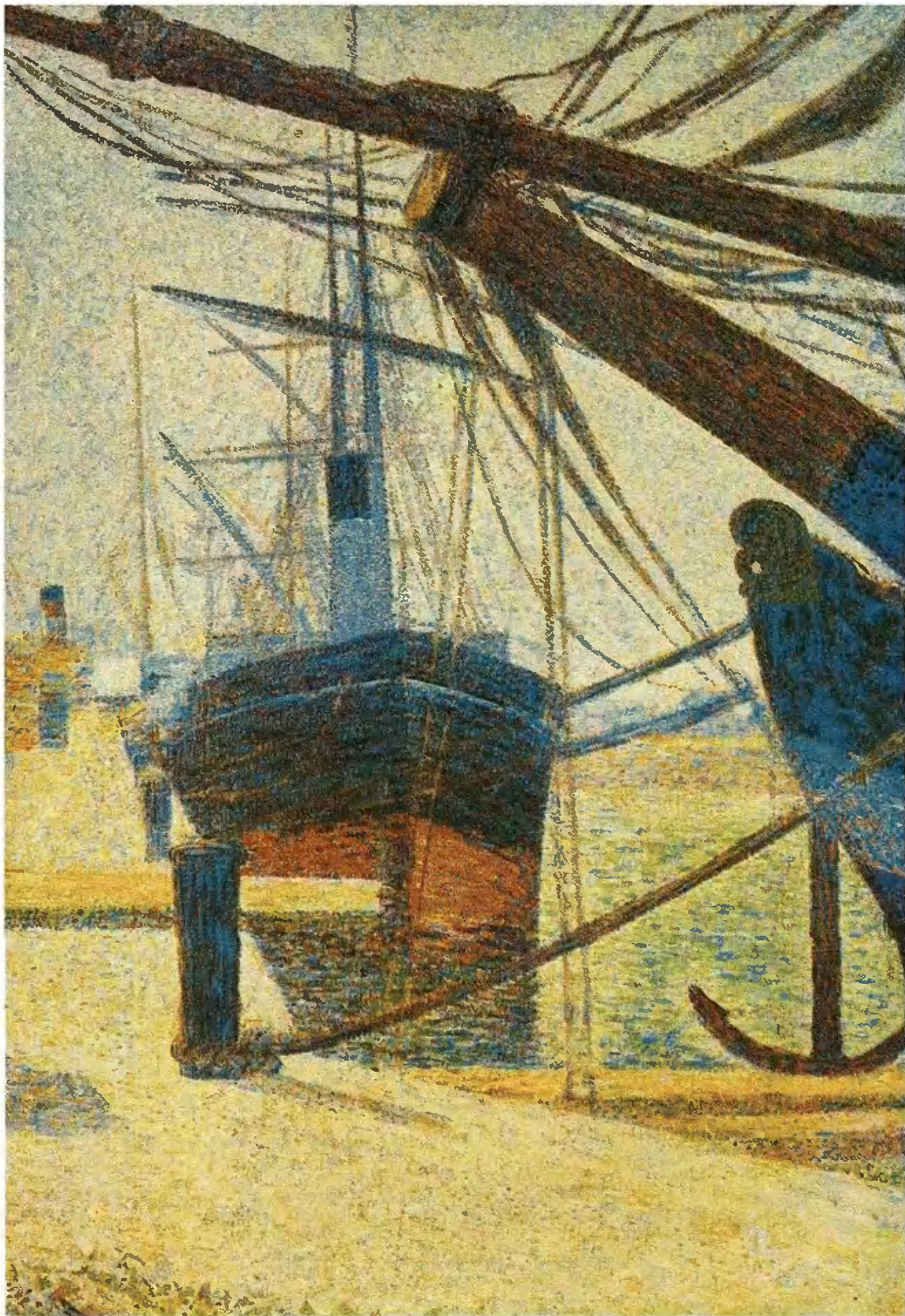
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Жесткость  
выпуклых многогранников

1988





## В номере:

Научно-популярный  
физико-математический  
журнал Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР



Издательство «Наука»  
Главная редакция физико-  
математической литературы

- 2 Беседа с академиком В. П. Масловым  
6 Н. П. Долбилин. Жесткость выпуклых многогранников  
16 А. Л. Стасенко. Коридор входа  
28 А. С. Штейнберг. Рождение сплава
- Задачник «Кванта»  
29 Задачи M1101 — M1105, Ф1113 — Ф1117  
30 Problems M1101 — M1105, P1113 — P1117  
34 Решения задач M1081 — M1085, Ф1093 — Ф1096  
32 Калейдоскоп «Кванта»  
Циклоида
- «Квант» для младших школьников  
40 Задачи  
41 С. А. Тихомирова. Архимедова сила в литературных произведениях
- Школа в «Кванте»  
Физика 8, 9, 10:  
45 Закон сохранения энергии  
47 Правило Ленца  
49 О швартовке, трении и формуле Эйлера
- Искусство программирования  
51 А. Г. Щеголев. Рисует школьная ЭВМ  
54 Варианты вступительных экзаменов  
62 Ответы, указания, решения  
Смесь (16—23, 28, 44)
- Наша обложка  
1,4 Многогранник-флексор, предложенный Клауссом Штеффеном.
- 2 Картина французского художника Ж. Сера (1859—1891) «Гавань Гонфлера» — хорошая иллюстрация к заметке «О швартовке, трении и формуле Эйлера», которую вы можете прочитать в этом номере журнала.
- 3 Шахматная страничка.





Выдающийся советский ученый Виктор Павлович Маслов — один из крупнейших специалистов по математической физике, лауреат Государственной (1978) и Ленинской (1986) премий. Он известен как своими глубокими теоретическими работами, так и умением доводить до исчерпывающего решения грудные конкретные прикладные задачи. Математически осмыслил метод квантования Бора — Зоммерфельда, В. П. Маслов создал свой знаменитый «канонический оператор», дающий ключ к решению большого числа разнообразных физических и математических задач. В предлагаемой читателю беседе Виктор Павлович рассказывает о своем пути в науку.

## БЕСЕДА С АКАДЕМИКОМ В. П. МАСЛОВЫМ

— Виктор Павлович, когда и как у вас возник интерес к физике и математике? Что повлияло в большей степени — школа, кружки, семья?

— В кружках я не участвовал, в школе ни математикой, ни физикой особенно не увлекался. Наоборот, был довольно слаб в этих предметах, особенно по физике. А это было такое время, когда физикой увлекались многие мои друзья, тогда была мода на физику. Может быть именно мое отставание по физике сыграло некоторую роль: я решил, что у меня не хватает образования, что мне надо пойти на физический факультет, чтобы его восполнить.

— В олимпиадах вы, наверное, не участвовали?

— Один раз я участвовал в олимпиаде по математике. Я пошел более или менее случайно, просто мои друзья пошли туда. Был это второй тур, я решил только одну задачу, после чего ушел. Получил за это грамоту.

— Окончив школу, вы пошли учиться на физический факультет МГУ. Были ли у вас другие варианты выбора жизненного пути?

— Да, я вообще больше увлекался гуманитарными науками. Но мой отчим, известный историк, профессор Борис Федорович Поршневу, сильно ме-

ня отговаривал от гуманитарного пути. Собственно говоря, он и уговорил меня идти на физический факультет.

— Кого вы считаете своими учителями? Кто из ваших коллег оказал на вас наибольшее влияние?

— Мой учитель — Сергей Васильевич Фомин. Он работал в пятидесятых годах на кафедре математики физического факультета МГУ. На втором курсе я стал интересоваться некоторыми чисто математическими задачами, в частности алгебраическими. Я обратился тогда к известному алгебраисту Игорю Ростиславовичу Шафаревичу. Некоторое время я занимался с ним, решил даже перейти на мехмат. Но когда я захотел это сделать, профессор Анатолий Алексеевич Власов, у которого я был на кафедре, меня не отпустил. Чтобы проверить, действительно ли я математик, он поставил мне одну математическую задачу. Я ее довольно быстро решил. Но Власов моего доказательства никак не хотел понять, поскольку оно было не прямое, как он, видимо, хотел, а косвенное. Потом мне все-таки удалось его убедить, он согласился меня отпустить. Но тут со мной стал заниматься Сергей Васильевич Фомин. Он

меня и отговорил от перехода на мехмат. Тогда я перешел к нему на кафедру математики физического факультета.

— Какие трудности встретились у вас на пути становления ученого?

— Я почувствовал очень большие трудности из-за недостаточного математического образования. Я мало знал специальную литературу. После окончания физического факультета мне пришлось довольно долго привыкать к математическому языку. Поэтому я не сразу был воспринят математиками как математик, а скорее как физик, поскольку язык у меня был для них несколько необычный. Поначалу ряд моих вполне математических работ переписывались математиками, иногда даже без ссылок. Среди математиков установилось мнение, что мои работы не строгие. Пришлось преодолеть эту точку зрения. Это мне удалось, как ни странно, когда я доказал свою компетентность в совершенно других областях математики, а не в тех, которыми я в основном в это время занимался.

— Создается такое впечатление, что вы все время шли по линии наибольшего сопротивления: пошли на физический факультет, потому что физика вам давалась хуже всего, а потом стали заниматься математикой, потому что вам не хватило математического языка. Это что — черта характера?

— Нет, по-видимому, я математикой увлекся на физическом факультете потому, что у меня просто были большие склонности к математике. Как я говорил, это увлечение произошло на втором курсе. Дальше, правда, я стал увлекаться и квантовой механикой, квантовой физикой. Пожалуй, можно сказать, что вообще-то я шел по линии своих увлечений, по линии наименьшего сопротивления в своей жизни. А на физический факультет я, может быть, действительно попал из упрямства: у меня в школьном аттестате была даже тройка по физике.

— Ваши первые работы (впрочем, и многие из нынешних) относятся к фундаментальным исследованиям и интересуют в первую очередь математиков-теоретиков. С другой стороны, вы известнейший математик-прикладник. Как вы соотносите «чистую» математику с физикой и прикладными вопросами?

— Я думаю — удачно сложилось, что я пошел на физический факуль-

тет. У меня есть склонность к обобщениям, к математическим и общим постановкам. Мои занятия физикой дали мне источник математических задач; это в целом положительно повлияло на мою работу. В студенческие и аспирантские годы я поставил перед собой ряд проблем, связанных с теоретической физикой. До сих пор не все проблемы мне удалось решить. Я думаю, что такой путь поиска математических задач на границе с теоретической физикой — хороший. С другой стороны, это позволяет оценивать окончательные результаты с точки зрения их приложений к физике или к каким-либо другим прикладным областям. В алгебре, и особенно в теории чисел, есть критерии, по которым обычно оценивается работа. Например, давно ли поставлена задача, кто ее решал и не решил, спортивный элемент, что ли. Если удастся такую задачу решить — значит, имеется серьезное продвижение. А вот в математике, связанной с приложениями, таким критерием, в известной степени, является именно приложение, широта возможных приложений. Здесь должна быть определенная интуиция, нужно чувствовать, какие именно задачи, решаемые данным математиком, могут быть полезными. Ну и в этом сильно помогают знания физики и физических проблем. Приведу пример такого математика, как Людвиг Дмитриевич Фаддеев. Он тоже окончил физический факультет. Задачи, которыми он начинал заниматься чуть ли не первым, потом получали широкий резонанс благодаря его и не только его работам. Фаддееву часто удается поймать животрепещущие проблемы одним из первых. Это такие проблемы, как уравнение Кортевега-Дефриза\*) или, скажем, обратная задача теории рассеивания. Фаддеев как-то чувствует, какие именно проблемы в дальнейшем будут развиваться. И это связано, в большой степени, с его физическим образованием.

\*) Дифференциальное уравнение, описывающее волны на неглубоких водоемах, решения которого (так называемые солитоны) обладают очень неожиданными математическими свойствами.

— Конечно, в качестве эксперта-математика, вы участвовали в создании проекта захоронения аварийного блока Чернобыльской АЭС. Что вы можете рассказать об этом?

— По-видимому, в человеке есть какие-то такие скрытые возможности, которые пока наука еще не в состоянии объяснить. Фокусник гипнотизирует человека, и тот на пальцах рук и ног устойчиво висит между двумя стульями. Это показывает совершенно необычайные потенциальные возможности, заложенные в человеке. Меня всегда поражало, насколько велик во время войны оказался потенциал нашего народа и наших ученых. Несмотря на огромные потери, страна после войны оказалась более сильной, чем до нее. Видимо, и здесь есть момент массового гипноза: колоссальное напряжение усилило народ.

Такая же ситуация была у нас, когда мы работали над проблемой Чернобыльской АЭС после взрыва. Это была настолько напряженная и продуктивная работа, что я до сих пор считаю, — такую работу можно проделать за два, три года, но никак не за те два месяца, за которые мы ее выполнили. Притом не только мы — математики, но и все, кто этим занимался, все приехавшие ученые других специальностей были охвачены этим массовым подъемом. Откуда только брались силы — работа шла неизмеримо быстро. Никаких бюрократических преград, на преодоление которых в повседневной жизни уходят основные силы ученого. Когда мы продумывали и предлагали какой-либо опыт, я утром, скажем, обращался к организаторам, и в тот же день эксперимент проводился на Чернобыльской АЭС. Мы, конечно, прекрасно знали, как дорого обходится каждый эксперимент, сколько рентген-часов на человека приходится при той или иной проверке. Это создавало необычайное напряжение. Другой пример — мой товарищ по работе В. П. Мясников звонил мне в три часа ночи сообщить, что «дыра» в доказательстве, которую я обнаружил, заделывается — вариант «держится». Или еще мои молодые сотрудники задерживались у меня вечерами после последнего авто-

буса, оставались ночевать. Когда ребята настолько уставали, что уже вообще не могли больше работать, то уходили в отпуск (это было время отпусков, и я всех их задержал), их заменяли другие. Никогда в своей жизни я не испытывал такого сильного напряжения. Когда решались серьезные вопросы, связанные с саркофагом, и надо было принимать ответственное решение, каждый представлял себе насколько важными могут быть последствия неправильного выбора. Сроки поджимали, ведь саркофаг создавался молниеносно, наше математическое моделирование иногда не успевало. А когда учит и заставляет переделять природа, это горький и дорогостоящий опыт. Поэтому работа была совершенно необычная, напряженная и интенсивная. А в конечном счете были получены не только расчеты, касающиеся этой станции непосредственно. — хотя мы проводили расчеты только для нее. Но тем не менее в результате математического моделирования получились описания неожиданных для механики эффектов, иногда противоречащих предположениям наших коллег-физиков.

— В прикладных задачах, подобных моделированию поведения сложной системы (гипнотической из повиновения АЭС), используется компьютерный эксперимент. Применяли ли вы этот прием?

— Компьютерный эксперимент на самом деле надо было бы применять до того, как это печальное событие произошло. Как говорится, русский человек задним умом крепок — такой компьютерный эксперимент сейчас и был проведен; он прямо показал, что взрыв должен был произойти. После того как взрыв произошел, компьютерный эксперимент, показывающий какой-то один из возможных вариантов поведения реактора, уже на самом деле оказался бы не достаточным, потому, что мы должны были просмотреть все варианты. Ведь наша цель — дать определенные рекомендации. Например, наши расчеты показали, что не обязательно было подводить бетонную плиту (подушку) под саркофаг. Огромные деньги были затрачены, в начале казалось — самая большая

опасность в том, что реактор прожжет бетонный пол и грунт под станцией. И вот проделали огромные работы, сделали эту гигантскую бетонную подушку. Но по нашим расчетам — которые, увы, запоздали — оказалось, что и так реактор не прожжет пол при получающихся температурных сгустках. Вы понимаете, сколько вариантов нужно было учесть. А вдруг все-таки возникнет такая ситуация, что прожжет. У нас получилось, что в общем положении, как говорят математики, с точностью до меры ноль, не прожжет.

Для нас станция была черным ящиком, что и как там разломалось было видно только на вертолетных съемках — что закидано, как легли мешки с песком. А что там происходило внутри, нам не было ясно, мы могли выбрать нужную модель только по тем экспериментам, что мы сами ставили. В конце концов мы выбрали модель правильно. Но если говорить о компьютерном эксперименте, то «проиграть» на ЭВМ все возможные варианты здесь было немыслимо. Поэтому теория и расчет должны были сыграть решающую роль.

— Что можно рассказать неспециалистам о ваших научных исследованиях?

— Я могу лишь перечислить области, которые в данный момент меня больше всего интересуют. Это проблемы турбулентности в гидродинамике и в плазме — с одной стороны, задачи теории управления — с другой. Правда, одновременно я сейчас занимаюсь и проблемой больших отклонений в теории вероятностей. Словом, разными совсем вопросами, к сожалению, далекими друг от друга. Хотя, возможно, есть какие-то идейные связи между ними.

— Что вам сейчас больше всего мешает в работе?

— Мне, как наверно и многим, мешают мелкие заботы и хлопоты, отвлекающие от основной работы. Масса всяких мелких дел, и не только моих собственных, но и моих близких друзей. Все они накапливаются и очень сильно мешают. Очень много в нашей жизни совсем не нужной мелкой и нелепой возни. Преодо-

ление бюрократических препонов, потери времени на очереди. Американцы говорят, что время — деньги. Должен признаться, что я трачу основную часть зарплаты на то, чтобы сохранить свое время от подобных потерь по мелочам. Но все равно масса времени пропадает даром, например, на разные бюрократические препоны — с ними уже ничего не поделаешь — ведь взятки давать запрещено. Потеря времени для ученого тяжела потому, что это — потеря эффективности работы, уменьшение КПД.

— Каковы ваши внеучебные увлечения? Хобби? Спорт? Музыка? Чтение?

— Когда-то в студенческие годы я очень увлекался живописью, скульптурой. Не в том смысле, что я сам писал или лепил, но слыл знатоком, не пропускал ни одной выставки, частные коллекции знал хорошо. Сейчас это меня не занимает в такой степени, как раньше. Но тем не менее и сейчас я для себя делаю какие-то открытия в этой области. Недавно, например, я в Марселе совершенно по новому увидел такого замечательного художника, как Монтичелли. Увидел стороны его творчества, которые я раньше не знал, и это произвело на меня сильное впечатление.

Что касается спорта, я очень увлекался академической греблей и до сих пор не мыслю себе отдыха без лодки. Выступал в студенческие и аспирантские годы в соревнованиях, выигрывал. Выступал и на народных лодках, здесь тоже были у меня определенные достижения, на байдарках прогулочных выигрывал — не очень серьезные — соревнования, но, в основном, занимался и продолжаю любить академическую греблю.

— Какие качества вы хотели бы видеть у своих учеников?

— Я бы хотел видеть такие качества, которых мне не достает самому. Тогда, вместе с учениками, я бы смог восполнить эти пробелы.

— А более конкретно?

— Я не хочу выдавать своих недостатков.

(Окончание см. на с. 14)



# ЖЕСТКОСТЬ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Кандидат физико-математических наук  
Н. П. ДОЛБИЛИН

Каждый, кто клеил или просто держал в руках картонную модель многогранника, замечал ее жесткость и, возможно, задумывался над этим. Интуиция скорее всего подсказывала, что жесткость модели не случайна, что обусловлена она какими-то пусть запутанными и неясными, но очевидными существующими связями между гранями многогранника. Вопрос о жесткости многогранника — это старый геометрический вопрос и, как оказалось, очень не простой. Прояснился он лишь в наше время, но первый важный шаг в его решении был сделан 175 лет тому назад двадцатитрехлетним математиком Огюстеном Луи Коши, питомцем знаменитой парижской Политехнической школы.

Выпускника Политехнической школы 1807 года Огюстена Луи Коши «по его блестящим достижениям во всех областях математики можно поставить почти рядом с Гауссом». Французского математика «почти рядом» с Карлом Фридрихом Гауссом поставил немецкий математик Феликс Клейн. Это придает высокой оценке творчества Коши особое значение, если учесть, что взаимоотношения между французскими и немецкими математиками, как правило, развивались в атмосфере острой конкуренции, а

признание заслуг соперников никогда не отличалось щедростью.

Результаты Коши, принесшие автору славу величайшего математика, относятся в основном к математическому анализу и алгебре, к математической физике и механике. В огромном научном наследии Коши, занимающем 25 внушительных томов (все-го у Коши, по данным его биографа, 789 работ), его исследования по геометрии могли бы остаться незамеченными, если бы не его работа «О многоугольниках и многогранниках», опубликованная в «Журнале Политехнической школы» в 1813 году.

## Теорема Коши о единственности

Эта работа Коши — а о ней наш рассказ — связана с таким естественным вопросом: в какой мере грани многогранника и порядок их примыкания друг к другу определяют форму многогранника? Поясним этот вопрос на примере. Рассмотрим два многогранника: башню с четырехскатной крышей на кубическом основании и башню, составленную из тех же граней, но с продавленной крышей (рис. 1, 2). Ясно, что эти многогранники не равны, хотя составлены из попарно равных граней, примыкающих друг к



Рис. 1.

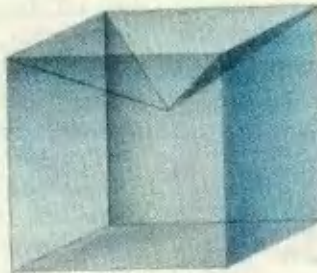


Рис. 2.



Рис. 3.



другу в одном и том же порядке.

Коши доказал, что подобная ситуация невозможна, если речь идет о двух выпуклых многогранниках.

**Теорема Коши.** *Два выпуклых многогранника с попарно равными гранями, составленными в одном и том же порядке, равны.*

Для доказательства этой теоремы (оно намечено ниже) юный Коши предложил новый метод, который, по словам академика А. Д. Александрова, «представляет собой одно из прекраснейших рассуждений, какие только знает геометрия». Впоследствии это действительно прекрасное рассуждение стало в теории многогранников одним из стандартных методов доказательства других, аналогичных, теорем единственности.

### Гипотеза Эйлера

Вопрос — однозначно ли задается форма многогранной поверхности своими гранями, или поверхность может как-то меняться, несмотря на неизменность своих граней, — интересовал математиков задолго до Коши.

Над вопросом единственности размышлял и великий Эйлер. В 1766 году он высказал гипотезу: «Замкнутая пространственная фигура не допускает изменений, пока не рвется». «Замкнутой пространственной фигурой» у Эйлера считалось то, что сейчас принято называть замкнутой поверхностью. Тем самым предположение Эйлера относилось не только к многогранным поверхностям. Но по отношению к многогранникам уверенность в справедливости этой гипотезы была наиболее основательной. Эта уверенность покоилась на многовековом опыте обращения с многогранниками и по своей силе достигала верования в аксиому.

### Простые многогранники

Вопрос о неизменности многогранной поверхности оказался твердым орешком, но прежде, чем в нем разобраться, необходимо уточнить некоторые понятия. Условимся здесь под *многогранником* понимать не тело, ограничен-

ное многоугольниками, как это делается в школе, а поверхность, составленную из этих многоугольников; при этом мы будем предполагать, что наш многогранник склеен из конечного числа конечных многоугольников так, что к каждой стороне любой ее грани приклеена одна и только одна грань\*). Многогранник с таким условием называют замкнутым. Условие замкнутости — это естественное условие. Любой из многогранников, изучаемый в школьном курсе — призмы, пирамиды, платоновы тела — замкнутый. Обычный фанерный ящик для посылок, но без крышки, нельзя считать замкнутым многогранником. Но стоит прибить к нему крышку, как получается замкнутый многогранник.

Мы будем также предполагать, что наш многогранник является, как говорят математики, топологической сферой. *Топологическая сфера* — это такая поверхность, которая отличается от обычной «круглой» сферы настолько, насколько изогнувшаяся покрывка спущенного мяча отличается от накачанного. Другими словами, мы предполагаем, что наш многогранник, будь он сделан из резины, можно было бы растянуть без разрывов и склеек в обычную круглую сферу. Условимся называть такой многогранник *простым*. Все выпуклые, в том числе и «школьные», многогранники — простые, так же, как оба многогранника на рисунках 1, 2. На рисунке 3 приведен пример не простого, а *топообразного* многогранника.

Многогранник может быть столь сильно «закручен», что иногда трудно разобраться, простой он или нет. Тем более замечательно, что о многограннике можно сказать, простой он или нет, даже не взглянув на него. Представим, что кто-то сообщил нам число всех вершин  $V$ , число всех ребер  $R$  и число всех граней  $G$  неизвестного нам многогранника  $X$ . Тогда, подсчитав число  $\varphi(X)$ , называемое *эйлеровой характеристикой* много-

\*) Дать строгое математическое определение многогранника, охватывающее и невыпуклые многогранники, не так просто, и мы здесь этого делать не будем.

гранника  $X$ , по формуле

$$\varphi(X) = V - P + G,$$

можно уверенно сказать, будет ли многогранник  $X$  простым. *Многогранник будет простым тогда и только тогда, когда его эйлерова характеристика равна 2.* Для многогранников, не являющихся простыми, эйлерова характеристика не превосходит нуля. В частности, для торообразных многогранников (см. рис. 3) эйлерова характеристика равна нулю.

### Изгибаемость многогранников

Представим теперь, что из картонных многоугольников с помощью клейкой ленты мы склеили многогранник (разумеется, конечный, замкнутый, простой). Ясно, что из-за гибкой в каждом ребре связи любые две соседние грани могли бы поворачиваться друг относительно друга вокруг общего ребра, подобно страничкам книги, могли бы... если бы они не были связаны с остальными гранями.

Когда же грани склеены в многогранник, то возникает вопрос: можно ли непрерывно изменять, деформировать многогранник так, чтобы при деформации все его грани оставались неизменными, а изменялись лишь двугранные углы? Если для данного многогранника такая деформация возможна, то многогранник назовем *изгибаемым*, а если нет — *неизгибаемым*.

Таким образом, изгибание многогранника, если оно вообще возможно, связано с изменением двугранных углов. И, хотя каждая пара соседних по ребру граней сама по себе свободна в выборе своего двугранного угла, кажется весьма вероятным, что в обществе других граней эта свобода утрачивается. Возможно, что такого рода «правдоподобные рассуждения» послужили Эйлеру опорой для гипотезы о том, что замкнутые многогранники неизгибаемы.

Вопрос об изгибаемости простых многогранников был решен только спустя два века после Эйлера. Уже в наше время, всего лишь десять лет назад, выяснилось, что относительно многогранников Эйлер в своем пред-

положении был прав... и не прав. Прав потому, что, как было установлено в 1975 году, «почти все» простые многогранники неизгибаемы. Однако «почти все» — это еще не все многогранники, а их в некотором смысле «подавляющее большинство». Два года спустя, в 1977 году, американский геометр Р. Коннели построил первые примеры изгибаемых многогранников и тем самым опроверг гипотезу Эйлера (см. «Квант», 1978, № 9, с. 14, а также первую и четвертую страницы обложки настоящего номера).

Не исключено, что открытие изгибаемых многогранников кому-то покажется не очень удивительным, особенно если он вспомнит о мехах музыкальных инструментов, например, баяна. Но эта ассоциация здесь не уместна. Дело в том, что меха баяна «работают» благодаря эластичности и сминанию материала, из которого они изготовлены. Если бы меха были собраны из твердых пластин, соединенных между собой маленькими дверными петлями, то сыграть на инструменте не удалось бы. Такие меха, как нетрудно понять, нельзя было бы ни сжать, ни растянуть.

Впрочем, изгибаемый многогранник тоже непригоден для мехов, хотя и по другой причине. Дело в том, что известная на сегодня коллекция изгибаемых многогранников обладает несколько неожиданным свойством: *заклоченный в многограннике объем при изгибании остается постоянным*, т. е. многогранник «не дышит». Возникла гипотеза, что это всегда так — этот объем не изменяется при изгибании многогранника.

Заметим далее, что вследствие теоремы Коши *изгибаемый многогранник не может быть выпуклым*.

Действительно, изгибаемость данного многогранника означает, что существуют другие многогранники, склеенные из тех же граней в том же порядке, но не равные данному из-за чуть-чуть других двугранных углов. При этом, если исходный многогранник был выпуклым, то и другой со слегка лишь отличающимися углами, тоже должен быть выпуклым. А это

противоречит теореме Коши, согласно которой два таких выпуклых многогранника должны стать равны.

### Лемма Коши о выпуклых многоугольниках

Для доказательства теоремы Коши полезно внимательно посмотреть, как обстоят дела с многоугольниками. Со всем не случайно в названии работы Коши, посвященной теореме о многогранниках, присутствует слово «многоугольник». Представим плоский многоугольник, составленный из стержней с шарнирными соединениями в их концах. В случае треугольника длины стержней задают углы между ними (третий признак равенства треугольников), и конструкция является жесткой. С практическим применением этого очевидного геометрического факта мы сталкиваемся на каждом шагу: в стержневых конструкциях, которые подвергаются значительным нагрузкам (фермы мостов, стрелы подъемных кранов, перекрытия сооружений и т. п.), для обеспечения жесткости присутствуют треугольные элементы.

В случае же многоугольника с большим числом сторон длины сторон не определяют его углов, а следовательно, не задают и сам многоугольник. Тем не менее, Коши обратил внимание на один факт, оказавшийся существенным при доказательстве его теоремы.

Пусть  $A = A_1A_2\dots A_n$  и  $B = B_1B_2\dots B_n$  — выпуклые  $n$ -угольники, причем  $A_1A_2 = B_1B_2, \dots, A_{n-1}A_n = B_{n-1}B_n, A_nA_1 = B_nB_1$ . Сопоставим каждой вершине  $A_i$  первого многоугольника знак «+» или «-» в зависимости от того  $\angle A_i > \angle B_i$  или  $\angle A_i < \angle B_i$ . Если  $\angle A_i = \angle B_i$ , то вершина  $A_i$  остается неотмеченной. Прежде чем перейти к лемме Коши, заметим, что отмеченных вершин у неравных многоугольников не меньше четырех, иначе (как легко доказать) многоугольники  $A$  и  $B$  равны и неотмеченных вершин нет вовсе.

**Лемма 1.** Пусть у двух выпуклых многоугольников соответственные стороны попарно равны, а среди соответ-



Огюстен Луи Коши (1789—1857).

ственных углов имеются попарно неравные. Тогда при обходе вершин многоугольников разности соответственных углов меняют знак не менее четырех раз.

Понятно, что число перемен знака при обходе вершин многоугольника должно быть четно и не равно нулю. Следовательно, для доказательства леммы нужно показать, что число перемен знака не равно двум. Изложим идею доказательства.

Предположим, что число перемен знака равно двум. Тогда многоугольник  $A$  разбивается на две ломаные: у одной ломаной  $A_1A_{j+1}\dots A_j$  есть вершины, отмеченные знаком «+», и ни одна из вершин не отмечена минусом; у другой ломаной —  $A_jA_{j+1}\dots A_1$ , наоборот, есть вершины, отмеченные знаком «-», и ни одна из вершин не отмечена знаком «+» (рис. 4).

Поэтому ломаную  $A_1A_{j+1}\dots A_j$  можно получить из соответствующей ломаной  $B_1B_{j+1}\dots B_j$  многоугольника  $B$ , увеличивая углы последней. Кажется совершенно очевидным, что в результате такой деформации ломаной, замыкающая ее хорда должна увеличиваться, т. е.  $A_1A_j > B_1B_j$ . (Строгое доказательство этого факта не-



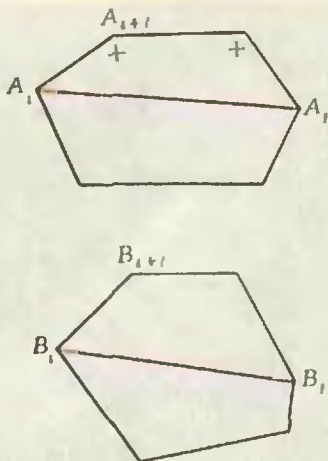


Рис. 4.

сколько утомительно, и мы его опускаем.)

С другой стороны, вторая ломаная  $A_i A_{i+1} \dots A_i$  многоугольника  $A$  получается из соответствующей ломаной  $B_i B_{i+1} \dots B_i$  многоугольника  $B$  в результате уменьшения углов. При этом замыкающая хорда должна уменьшаться. Значит, с другой стороны,  $A_i A_i < B_i B_i$ . Два противоречащих друг другу неравенства показывают, что предположение о наличии ровно двух перемен знака неверно. Следовательно, перемен знака не меньше четырех, что и требовалось доказать.

Лемма 1, о которой только что шла речь, потребует для доказательства теоремы Коши, но в другом варианте — для случая выпуклых многоугольников на сфере. Формулируется и доказывается она так же, как выше: нужно только уточнить соответствующие понятия.

Определение сферического многоугольника совершенно аналогично

определению плоского многоугольника. При этом надо иметь в виду, что, во-первых, *сторона* сферического многоугольника — это дуга большой окружности и *длина* стороны — это длина дуги. Во-вторых, *угол* сферического многоугольника — это угол между касательными, проведенными к дугам-сторонам в точке их пересечения, т. е. в вершине многоугольника. Очевидно, что угол между сторонами равен линейному углу двугранного угла, образованного плоскостями соответствующих больших окружностей (рис. 5). В-третьих, *выпуклый* сферический многоугольник — это такой многоугольник, который лежит на сфере по одну сторону от каждой большой окружности, содержащей сторону-дугу нашего многоугольника.

### Основная лемма Коши

Предположим, что два многогранника, удовлетворяющие условию теоремы Коши, не равны. Тогда среди соответствующих двугранных углов должны быть попарно неравные. Отметим ребро одного из наших многогранников знаком «+» или знаком «-» в зависимости от того, двугранный угол при этом ребре больше, или меньше соответствующего двугранного угла другого многогранника. Разумеется, не все ребра обязаны быть отмечены, поскольку среди соответствующих двугранных углов могут быть и попарно равные углы.

Выберем какую-нибудь вершину  $O$  многогранника, к которой подходят отмеченные тем или иным знаком ребра, и опишем из нее, как из центра,

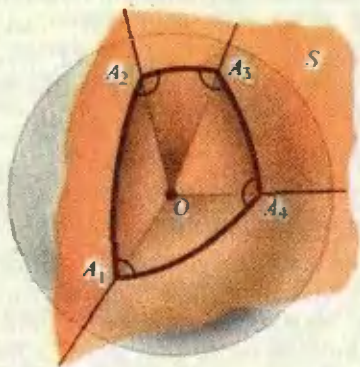


Рис. 5.

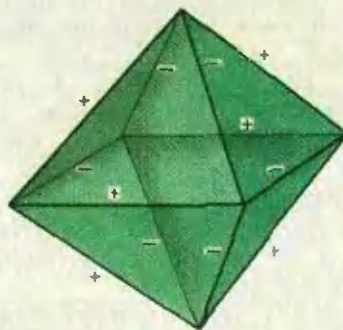


Рис. 6.

сферу  $S$ . При этом радиус возьмем настолько маленьким, чтобы сфера  $S$ , пересекая ребра и грани многогранника, подходящие к вершине-центру  $O$ , не задевала никаких других ребер и граней многогранника. Ясно, что грани многогранника, образующие многогранный угол с вершиной  $O$ , вырезают на сфере  $S$  выпуклый (сферический) многоугольник  $M$ , углы которого равны двугранным углам многогранника. Если провести таким же радиусом сферу  $S'$  в соответствующей вершине  $O'$  другого многогранника, то на ней вырезается многоугольник  $M'$ , стороны которого попарно равны соответствующим сторонам многоугольника  $M$ . Равенство сторон вытекает из условия теоремы Коши: в соответствующих вершинах многогранников должны сходиться попарно равные грани.

Вот здесь и наступает время леммы 1. Мы предположили, что теорема Коши о единственности неверна; это значит, что хотя бы одно ребро окажется отмеченным знаком «+» или «-», и, в соответствии с леммой 1, если к какой-нибудь вершине подходят отмеченные ребра, то число перемен знака у ребер при обходе вокруг этой вершины не меньше 4.

От этого несложного замечания до доказательства теоремы, казалось бы, еще далеко. Но здесь Коши находит неожиданный остроумный ход, после которого доказательство становится делом техники. Оказывается, справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.** Пусть на замкнутом выпуклом многограннике некоторые ребра отмечены знаком + или -. Выделим все те вершины многогранника, к которым подходит хотя бы одно отмеченное ребро. Тогда среди выделенных вершин всегда найдется такая вершина, при обходе вокруг которой встретится менее четырех перемен знака.

Например, на рисунке 6 приведена расстановка знаков на ребрах октаэдра, при которой имеются две вершины с числом перемен знака, равным двум.

Идея доказательства основной леммы хорошо видна при рассмотрении

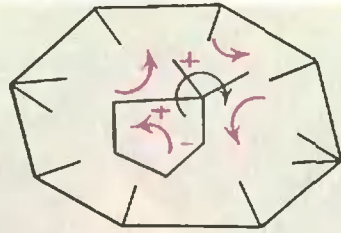


Рис. 7.

частной ситуации, а именно, когда знаками отмечены все ребра. Итак, предположим, что все ребра отмечены тем или иным знаком. Обозначим, как и ранее, через  $B$  число вершин, через  $P$  число ребер, через  $\Gamma$  число граней многогранника, а через  $N$  общее число перемен знака при обходах вокруг всех вершин. Для доказательства леммы 2 достаточно показать, что

$$N < 4B.$$

Мы вслед за Коши докажем более сильное неравенство:

$$N \leq 4B - 8.$$

Легко видеть, что число  $N$  перемен знака при обходах вокруг всех вершин равно общему числу перемен знака при обходах вокруг всех граней. Это следует из того, что каждая пара соседних ребер при обходе вокруг вершины является одновременно парой соседних ребер и при обходе вокруг соответствующей грани и наоборот (рис. 7).

Обозначим через  $\Gamma_n$  число  $n$ -угольных граней многогранника,  $n \geq 3$ . Тогда

$$\Gamma = \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6 + \dots \quad (1)$$

Ясно, что при обходе  $n$ -угольника число перемен знака не больше  $n$ , а если  $n$  — нечетно, то не больше, чем  $n-1$ . Поэтому

$$N \leq 2\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 4\Gamma_5 + 6\Gamma_6 + 6\Gamma_7 + \dots \quad (2)$$

Так как каждое ребро принадлежит двум граням, то

$$2P = 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + 6\Gamma_6 + \dots \quad (3)$$

Перепишем формулу Эйлера в виде

$$4B - 8 = 4P - 4\Gamma. \quad (4)$$

Подставим в (4) соотношения (3) и (1):

$$4B - 8 = 2(3\Gamma_3 + 5\Gamma_5 + \dots) - 2(2\Gamma_3 + 2\Gamma_4 + 2\Gamma_5 + \dots) = 2\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 6\Gamma_5 + \dots \quad (5)$$

В соотношении (5) коэффициент при  $\Gamma_n$  равен  $2(n-2)$  и, следовательно,



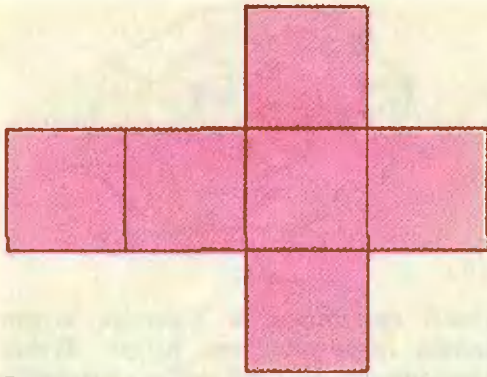


Рис. 8.

если  $n \geq 3$ , он не меньше ближайшего к  $n$  снизу числа, которое как раз и есть коэффициент при  $\Gamma_n$  в правой части неравенства (2). Поэтому из (2) и (5) следует требуемое неравенство  $N \leq 4B - 8$ .

Доказательство леммы 2 в общем виде, когда, вообще говоря, не все ребра отмечены знаком, усложняется дополнительными техническими деталями, которые мы опускаем.

Заметим, что условие выпуклости многогранника при доказательстве леммы 2 не используется: она верна для произвольных простых замкнутых многогранников. Выпуклость многогранника в теореме Коши существенна лишь для применения леммы 1.

Подведем итог. Если бы теорема Коши была неверна, то по лемме 1 на ребрах должна была бы возникнуть расстановка знаков, которая по лемме 2 невозможна. Доказательство теоремы Коши, точнее, изложение основной идеи этого доказательства, завершено.

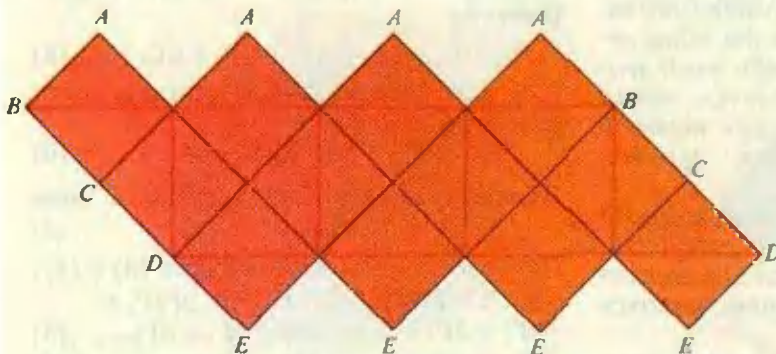
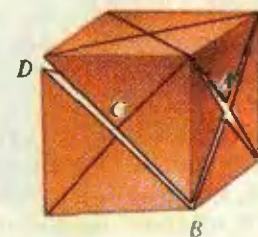


Рис. 9.

а)



б)

### Теорема Александрова о достаточности

Когда работа Коши увидела свет, научные интересы ее автора были уже далеки от этой области. В дальнейшем глубокие результаты по теории многогранников были получены представителями геометрической школы академика А. Д. Александрова. В 1939 году А. Д. Александров доказал теорему об условиях, при которых из данной развертки можно склеить выпуклый многогранник.

Посмотрим на рисунок 8, на котором нетрудно узнать хорошо известную развертку куба. Гораздо труднее увидеть, что развертка, представленная на рисунке 9, а, также является разверткой куба — одинаково отмеченные на рисунке вершины задают отождествление вершин и пар склеиваемых сторон (рис. 9, б). Обратим внимание на то, что многоугольники развертки не обязательно совпадают с гранями получающегося из него многогранника. Грань многогранника при этом может состояться из одного или нескольких кусков разных многоугольников развертки. Заметим также, что не всякая вершина многоугольника развертки обязана быть вершиной многогранника, она может быть «спрятана» внутри ребра или внутри грани многогранника.

Возьмем произвольную развертку, т. е. возьмем несколько вырезанных из бумаги выпуклых многоугольников и укажем, какую сторону каждого из них будем склеивать с какой стороной другого многоугольника. Склеиваемые стороны, разумеется, должны



быть одинаковой длины. Будем склеивать многоугольники в соответствии с указаниями о порядке склеивания (при этом разрешается сгибать многоугольники развертки). Возникает вопрос: из каких разверток можно таким образом получить выпуклый многогранник? Для этого необходимо выполнение двух условий:

(I) для развертки имеет место формула Эйлера ( $V - P + G = 2$ );

(II) сумма плоских углов, сходящихся при склеивании в одной вершине, не превышает  $360^\circ$ .

Смысл теоремы Александрова поражает своей простотой: условия (I) и (II) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы из многоугольников развертки можно было склеить выпуклый многогранник (возможно, дополнительно сгибая многоугольники развертки).

Развивая идеи, лежащие в основе этой теоремы, А. Д. Александров построил внутреннюю геометрию выпуклых поверхностей — одну из важнейших теорий в современной геометрии.

Вернемся к развертке на рисунке 9,а. Даже не глядя на рисунок 9,б, проверив для нее выполнимость условий Александрова, можно утверждать, что из этой развертки склеивается некоторый выпуклый многогранник. Сколько разных выпуклых многогранников можно склеить из одной развертки? Из-за того, что грани многогранника не фиксированы, теорема Коши на этот вопрос ответа не дает. А. Д. Александров доказывает теорему, которая, с одной стороны, усиливает теорему Коши, с другой, — прекрасно дополняет его собственную теорему о достаточности: *если из развертки можно склеить выпуклый многогранник, то только один.*

Более того, из этой развертки нельзя получить вообще никакой другой выпуклой поверхности, не только многогранной, но и кривой. Это усиление теоремы Александрова было получено в 1941 году его молодым учеником С. П. Оловянишниковым\*.



А. Д. Александров.

Что касается наиболее полного обобщения теоремы Коши на случай произвольных, а не только многогранных поверхностей, то этот вопрос долгое время оставался нерешенным. Пусть произвольная замкнутая выпуклая поверхность выполнена из тонкого, гибкого, но неэластичного материала. Можно ли, сохраняя выпуклость, получить из нее поверхность другой геометрической формы? Если исходная поверхность — выпуклый многогранник, то нельзя — это случай теоремы Коши — Александрова — Оловянишникова о единственности.

Окончательное обобщение теоремы Коши на случай произвольных поверхностей было получено в 1949 году также представителем школы Александрова, советским геометром, академиком А. В. Погореловым. А. В. Погорелов доказал, что *любая замкнутая выпуклая поверхность неизгибаема с*

годы наложили свой отпечаток на несложную судьбу талантливого юноши. В 1941 году ему удалось закончить Ленинградский университет и поступить в аспирантуру к А. Д. Александрову. Но вскоре он ушел на фронт, осенью 1941 года был ранен. В госпитале он и написал работу об обобщении теоремы Коши. Вернувшись на фронт, С. П. Оловянишников погиб в декабре 1941 года на «Невском пятачке» — известном кровопролитными боями плацдарме.

\* Сергей Оловянишников — победитель первой математической олимпиады (1934 г.). Тридцатые

условием сохранения ее выпуклости. Теорема Погорелова о единственности, как и теорема Александра о достаточности, принадлежит к числу выдающихся достижений в области геометрии.

В геометрии есть немало интересных нерешенных задач, которые ждут своих будущих исследователей. Некоторые из проблем формулируются совсем элементарно, взять хотя бы упоминавшуюся нами гипотезу о сохранении объема при изгибании невыпуклых многогранников. Если думать в этом направлении, то полезно было

бы начать с попытки построить новые, еще неизвестные примеры изгибаемых многогранников. Не исключено, что среди вновь открытых могут оказаться многогранники, опровергающие эту гипотезу.

Заметим, что все результаты, о которых здесь говорилось, были получены математиками в возрасте до тридцати лет. Математика движется вперед усилиями молодых. Как сказал один известный математик, новые идеи рождаются в головах молодых геометров, но старые при этом полезны в роли «повивальной бабки».

## Интервью с академиком В. П. Масловым

(Начало см. на с. 2)

— Виктор Павлович, что вы можете посоветовать нашим читателям, начинающим изучать физику и математику?

— Увлечись какой-нибудь одной проблемой и подробно и скрупулезно ее изучать и разбирать. И потом постепенно, решая задачи, с ней связанные, все более и более широко охватывать смежные вопросы и таким образом, «по спирали», получать образование. Очень хорошо бывает и когда, скажем, одну проблему изучаешь, а затем начинаешь работать совсем в другой области. Так, известный математик Феликс Александрович Березин считал, что нужно обязательно выбрать две области, совсем далекие друг от друга, и их обе изучать, быть в курсе литературы по ним; увлекаться двумя задачами, как бы с двух сторон охватывать математику.

Мне кажется, что на самом деле современная математика и физика — это просто одна и та же наука. Вовсе не много-много разных наук, как часто думают, а — с достаточно глубокой физико-математической точки зрения — просто одна и та же наука. На самом деле следует знать в мате-

матике и физике все. Но знать все, конечно, невозможно. С другой стороны, каждая настоящая задача в известном смысле содержит в себе современную физику и математику целиком, если, конечно, эта глубокая и интересная задача. Это можно сравнить с искусством. Искусство развивается не разрозненно, а в некотором смысле глобально. Музыка, допустим, танцы и живопись, поэзия развиваются параллельно. Совершенно новые современные тенденции одновременно проявляются в каждом из этих видов искусства. Так было, например, с футуризмом в поэзии, живописи, музыке. Поэтому поэты Маяковский и Хлебников, художник Бурлюк, композитор Прокофьев так быстро поняли друг друга. Это была одна линия развития искусства на данном этапе. Так же и во всей науке, в частности, и в особенности в математике и физике. Недаром такой математик, как Сергей Петрович Новиков, который занимался топологией, потом стал совершенно свободно заниматься теоретической физикой на самом высоком современном уровне. Это не случайно.

Поэтому, мне кажется, нужно заниматься какой-то современной областью физики или математики, понять ее достаточно глубоко, и тогда только почувствовать дух физики и математики сегодняшнего дня.

# КОРИДОР ВХОДА

Доктор технических наук  
А. Л. СТАСЕНКО

— Ураа!! — кричали жители Гавра, наполняя собою все гаврские набережные... Черная масса ... шлепнулась в залив ... На середине залива барахтались три человека.

— Мы пятьдесят семь дней ничего не ели! — пробормотал худой, как голодный художник, мистер Лунд и рассказал, в чем дело.

А. П. Чехов. Летающие острова

А дело в том, что вернуться на Землю ничуть не проще, чем взлететь в космос. В самом деле, сколько нужно затратить энергии, чтобы поднять некоторую тяжесть (ну, например, себя) на высоту  $h$ ? Всякий грамотный школьник скажет:  $mgh$ . И если прыгнуть с высоты  $h$ , то эта (потенциальная) энергия перейдет в кинетическую, а затем превратится в тепло. Но кому от нее польза, — особенно если  $h$  равно, скажем, высоте десятиэтажного дома. Ведь желательно приземляться мягко, почти с нулевой скоростью, а это значит, что нужно всю кинетическую энергию, в которую превращается потенциальная энергия, куда-то девать, — например, расходовать на трение о веревку, спущенную с десятого этажа.

Точно так же летательный аппарат при посадке на Луну или на планеты, почти лишенные атмосферы (Меркурий, Марс), должен будет гасить скорость и соответствующую кинетическую энергию при помощи силы тяги ракетных двигателей, направленной в противоположную сторону.

Однако эти рассуждения верны, если иметь в виду стандартную рекомендацию школьных задач: «сопротивлением атмосферы пренебречь». Но ведь парашют, планер, самолет с выключенными двигателями (ставший планером) как раз и приземляются, не затрачивая энергии. Их скорость гасится аэродинамической силой — силой, действующей со стороны воздуха. А можно ли использовать атмосферу Земли для планирующего «бесплатного» приземления из космоса? Этот вопрос не столь тривиален,

как, может быть, кажется, если вспомнить печальную судьбу большинства метеоритов, которые так и не добираются до поверхности Земли, а если добираются, то в жалком виде. А нам хотелось бы приземляться «целиком», не затратив ни своей массы, ни своей энергии.

Так можно ли?

Чтобы ответить на этот вопрос, составим План. Когда автор этой статьи учился в школе, то для полного раскрытия образа, например, Татьяны Лариной или даже Бабы Яги непременно требовался План. Вот и сейчас мы будем действовать по плану: сперва вкратце вспомним, как устроена атмосфера, как зависит сила, с которой воздух действует на движущееся в нем тело, — аэродинамическая сила — от плотности атмосферы и скорости тела, как нагревается и охлаждается это тело при движении в атмосфере, и, наконец, перейдем к Заключению.

## Плотность атмосферы

Итак, прежде всего речь пойдет об атмосфере Земли. Правда, нечего и надеяться рассказать все, что можно, об атмосфере Земли — обо всех ее ветрах, грозах, тайфунах, облаках — этого не сделать даже в очень толстой книге. Но можно сделать то, что делают физики каждый раз, когда все очень сложно (а сложно почти всегда), — можно построить модель атмосферы. Хорошая модель должна описывать самые характерные черты объекта или явления, которые мы намереваемся использовать далее для работы. А что самое характерное для нас в атмосфере? Ну, например, ее плотность — ведь мы собираемся в атмосфере двигаться, причем быстро, а интуитивно ясно, что сила сопротивления движению должна зависеть от плотности окружающей среды (ведь



в ванне с водой руку двигать труднее, чем в воздухе при той же скорости).

Понятно, что с высотой плотность атмосферы должна уменьшаться. Зависимость плотности атмосферы Земли от высоты над уровнем моря приближенно можно выразить так называемой барометрической формулой Больцмана

$$\rho \approx \rho_0 e^{-\frac{h}{h^*}}, \quad (1)$$

пригодной до  $h \approx 80 \div 100$  км. В этой формуле  $\rho_0 = 1,3 \text{ кг/м}^3$  — значение плотности на уровне моря, а стоящая в знаменателе показателя степени величина  $h^* = 7,16$  км называется масштабным коэффициентом плотности. Понятно, что на высоте  $h^*$  плотность атмосферы в  $e = 2,72$  раза меньше, чем на уровне моря.

### Аэродинамическая сила

На тело, движущееся в воздухе, действует сила. Чтобы убедиться в этом, достаточно, например, горизонтально выставить ладонь в окно движущегося автобуса или вагона поезда (разумеется, осторожно!). При поворотах ладони вокруг горизонтальной оси сила со стороны воздуха будет действовать на кисть то вверх, когда ветер ударяет в ладонь, то вниз, когда в ее тыльную сторону. В первом случае угол атаки  $\alpha$  (между плоскостью ладони и вектором скорости  $\vec{v}$  набегающего потока) считается положительным, во втором — отрицательным (рисунок 1).

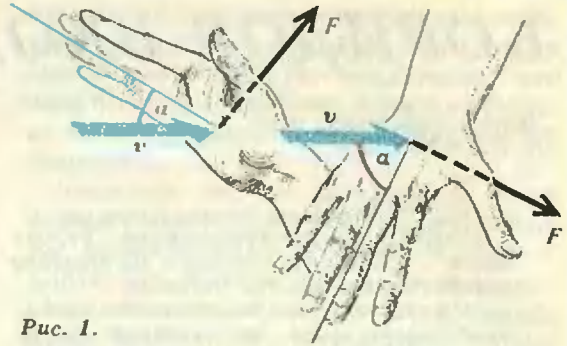


Рис. 1.

От чего эта сила зависит?

Используем для ответа на этот вопрос теорию размерностей. Сначала выпишем те характеристики процесса, от которых, как мы ожидаем, должна бы зависеть упомянутая сила.

Ну, разумеется, она зависит от скорости  $v$  (совсем разные силы действуют на вытянутую руку, когда едешь, скажем, на эскалаторе метро и когда высунешь руку из окна мчащегося автомобиля). Далее, если, например, провести ладонью в воздухе и в воде, то (при одинаковой скорости движения) во втором случае сопротивление больше, чем в первом. Значит, важно еще, в какой среде происходит движение, — сила должна зависеть от плотности среды  $\rho$ . А еще от чего? Конечно, от размера движущегося тела: попробуйте при одинаковых скоростях взмахнуть в воздухе ладонью без веера и с веером — сразу станет ясно, что веером махать труднее. Итак, аэродинамическая сила зависит еще и от характерного размера тела  $L$ .



О форме будущего «Востока» спорили долго. Предлагались конус, полусфера, цилиндр и, наконец, — сфера, шар. С. П. Королеву он сразу понравился. Для него легко рассчитываются аэродинамические характеристики, у него хорошая устойчивость, наименьшие суммарные тепловые потоки при торможении в атмосфере Земли. На участке приземления скорость спускаемого аппарата (СА) гасилась парашютной системой.

Перечислим эти величины вместе с их размерностями:

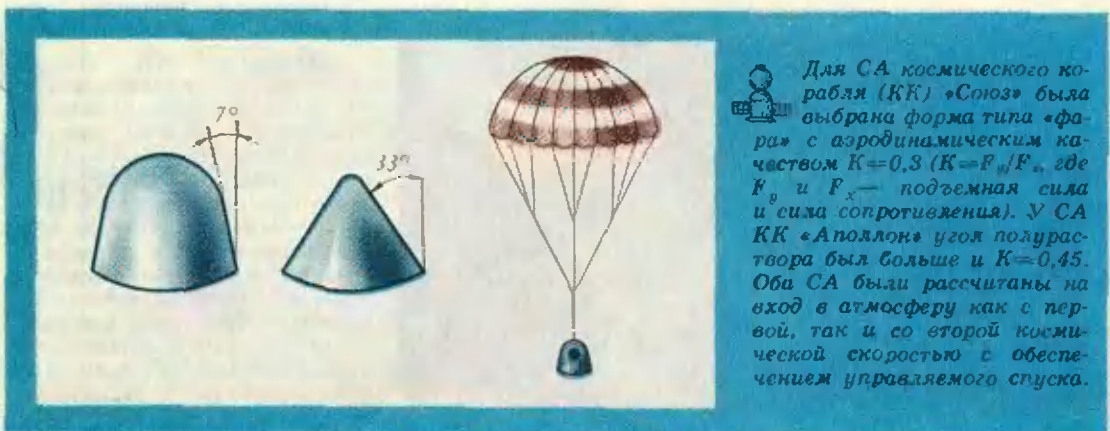
$$[v] = \frac{\text{м}}{\text{с}}, [\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, [L] = \text{м}.$$

Как из них составить комбинацию, имеющую размерность силы, т. е. ньютона:  $[F] = \text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$ ? Сразу видно, что размерность кг входит из наших трех параметров только в  $\rho$ , а секунда — только в размерность скорости, причем там она в знаменателе в первой степени, а нам надо во второй. Следовательно, уж точно сила будет пропорциональна произведению  $\rho v^2$ . Но размерность этой величины есть  $\text{кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{м})$ , а нам необходимо, чтобы метр стоял в числителе, — стало быть, нужно умножить еще на квадрат размера  $[L]^2$  (а  $L^2$  имеет размерность площади). Итак, единственная комбинация параметров  $v, \rho, L$ , имеющая размерность силы, есть  $\rho v^2 L^2$ , так что  $F \sim \rho v^2 L^2$ . Про коэффициенты пропорциональности (безразмерные!) теория размерностей нам ничего сказать не может.

«Но позвольте! — воскликнет вдумчивый читатель. — Ведь, по крайней мере, сила сопротивления может зависеть еще и от вязкости воздуха, а мы про вязкость совсем забыли?!» Это так. Более того, в некоторых случаях именно вязкость определяет силу сопротивления: например, на дробинку, опускающуюся на дно банки с медом, действует так называемая сила Стокса, пропорциональная не площади, а радиусу шарика и не второй, а первой

степени скорости. В этом примере течение меда вокруг шарика настолько медленное, что даже называется ползущим. Но это движение в густом, вязком меде мало похоже на обтекание сжимаемым воздухом большого летательного аппарата, движущегося со сверхзвуковой скоростью. (Такое влияние размера тела на характер движения (масштабный эффект) бывает и в других случаях: например, стальную иглу можно заставить плавать на поверхности воды в ванне, а стальной лом, очень похожий на большую иглу, — едва ли, — можете попробовать сами. В случае иглы существенна поддерживающая сила поверхностного натяжения, пропорциональная первой степени размера, а в случае лома превалирует сила тяжести, пропорциональная кубу размера, и эту силу уже не могут «перебороть» ни поверхностное натяжение, ни архимедова сила.)

Разложим суммарную аэродинамическую силу  $\vec{F}$ , действующую на обтекаемое тело со стороны воздуха, на две составляющие:  $F_y$  — перпендикулярную к вектору скорости  $v$ , и  $F_x$  — направленную вдоль этого вектора (рисунк 2). Первая из них —  $F_y$  — называется подъемной силой, вторая — силой сопротивления. Очевидно, что обе эти компоненты имеют одну и ту же размерность — Н; значит, и  $F_y \sim \rho v^2 L^2$ , и  $F_x \sim \rho v^2 L^2$ . В формулах для  $F_y$  и  $F_x$  должны стоять какие-то коэффициенты (безразмерные), зависящие, по крайней мере, от угла атаки (ведь если крыло или ладонь поставить пер-



Для СА космического корабля (КК) «Стиз» была выбрана форма типа «фара» с аэродинамическим качеством  $K=0,3$  ( $K=F_y/F_x$ , где  $F_y$  и  $F_x$  — подъемная сила и сила сопротивления). У СА КК «Аполлон» угол полураствора был больше и  $K=0,45$ . Оба СА были рассчитаны на вход в атмосферу как с первой, так и со второй космической скоростью с обеспечением управляемого спуска.



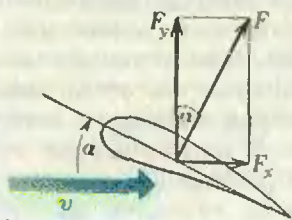


Рис. 2.

пендикулярно скорости  $v$ , то сопротивление будет, а подъемной силы — никакой). Один из этих коэффициентов (в случае подъемной силы) назовем коэффициентом подъемной силы  $C_y$ , а другой (в случае сопротивления) — коэффициентом сопротивления  $C_x$ .

Теперь напишем:

$$F_y = C_y \rho v^2 L^2, F_x = C_x \rho v^2 L^2. \quad (2)$$

Мы сказали, что  $C_y$  и  $C_x$  (назовем их аэродинамическими коэффициентами) зависят от угла атаки. А откуда взять эти зависимости? В некоторых случаях их можно рассчитать. Например, такой расчет можно провести для случая, когда аппарат летит очень высоко, там, где молекул уже мало и они вблизи аппарата друг с другом не сталкиваются, а сталкиваются только с ним, с аппаратом; это очень упрощает рассмотрение.

Давайте рассматривать движение в системе отсчета, связанной с аппаратом, который движется в атмосфере со скоростью  $u$ . В этой системе аппарат покоится, а молекулы воздуха налетают на него. Мы будем считать,

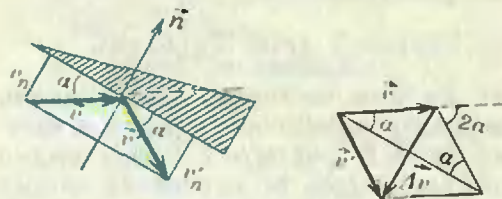


Рис. 3.

что  $u$  много больше тепловых скоростей молекул; тогда можно пренебречь хаотическим тепловым движением молекул и считать, что все они налетают на аппарат со скоростью  $\vec{v} = -\vec{u}$ .

Рассмотрим прежде всего удар одной-единственной молекулы о твердую поверхность аппарата, наклоненную по отношению к вектору скорости на угол  $\alpha$  (угол атаки). В предположении абсолютно упругого удара после столкновения модуль скорости  $v$  не изменится, а вектор  $\vec{v}$  повернется на угол  $2\alpha$  (рисунок 3). Нетрудно найти изменение скорости молекулы в результате удара (см. рисунок 3):

$$\Delta v = 2v_n = 2v \sin \alpha.$$

А изменение импульса этой молекулы, если ее масса  $m$ , равно

$$\Delta p_m = 2mv \sin \alpha.$$

Согласно закону сохранения импульса и третьему закону Ньютона, такой же по абсолютной величине импульс получит тело, о которое ударилась эта молекула. А сколько молекул ударя-



Крылатые КК (типа «Спейс Шаттл») обеспечивают аэродинамическое качество 1.2—3 при гиперзвуковых скоростях и 3—5 — при дозвуковых. Запас скорости при возвращении с орбиты позволяет «Шаттлу» за счет торможения и маневрирования осуществить безмоторную посадку на заданный аэродром. При спуске в атмосфере отдельные участки корпуса нагреваются до температуры более 1200 °С.



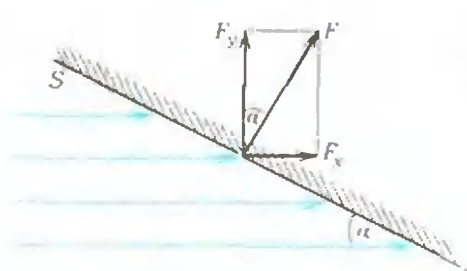


Рис. 4.

ется о поверхность  $S$  в единицу времени? Очевидно, что за единицу времени с площадкой  $S$  (см. рисунок 4) столкнутся все молекулы, находящиеся на расстоянии  $v$  от нее, т. е. молекулы из объема  $Sv \sin \alpha$ . И если концентрация молекул  $n$ , то за единицу времени о площадку  $S$  ударятся  $N = nSv \sin \alpha$  молекул.

Значит, полный импульс, получаемый телом за единицу времени, направлен по нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $S$  и численно равен

$$\Delta p_m \cdot N = 2mv \sin \alpha \cdot nSv \sin \alpha = 2\rho v^2 S \sin^2 \alpha$$

(так как  $nm = \rho$ ). Но ведь изменение импульса за единицу времени — это действующая сила. Значит, мы получили выражение для аэродинамической силы:

$$F = 2\rho v^2 S \sin^2 \alpha.$$

Разложив  $\vec{F}$  на две составляющие, получим подъемную силу и силу сопротивления:

$$\begin{aligned} F_y &= F \cos \alpha = 2\rho v^2 S \sin^2 \alpha \cos \alpha, \\ F_x &= F \sin \alpha = 2\rho v^2 S \sin^3 \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

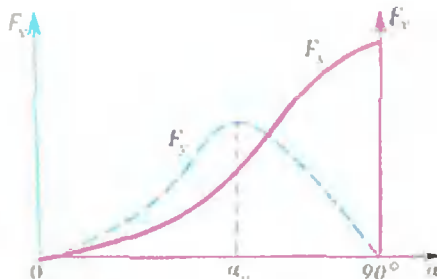
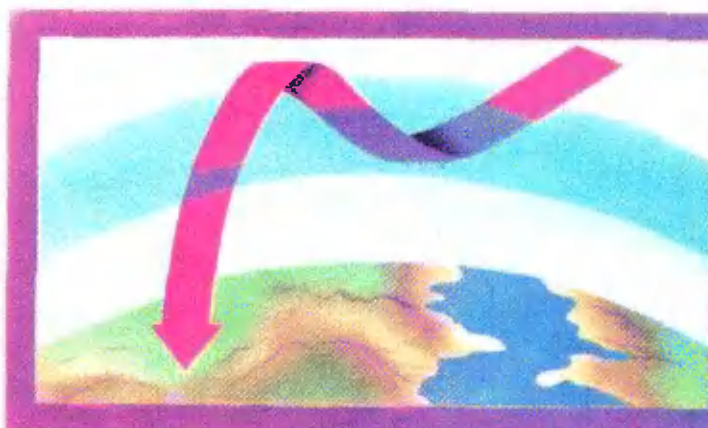


Рис. 5.

Зависимости  $F_y$  и  $F_x$  от угла атаки  $\alpha$  изображены на рисунке 5. Видно, что подъемная сила при некотором угле атаки  $\alpha_0$  достигает наибольшего значения. Его можно найти, построив функцию  $F_y(\alpha)$  точка за точкой (при помощи тригонометрических таблиц) или (для тех, кто умеет находить экстремум функции) приравняв нулю первую производную. И тем, и другим способом получим  $\operatorname{tg} \alpha_0 = \sqrt{2}$ . Учитывая известные соотношения  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$ ,  $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$  и подставляя найденное значение  $\operatorname{tg} \alpha_0 = \sqrt{2}$ , найдем максимальное значение подъемной силы:

$$F_{y \max} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \rho v^2 S = 0,77 \rho v^2 S.$$

А в тех случаях, когда аэродинамические коэффициенты рассчитать трудно, надо изучить их зависимость от угла атаки экспериментально — для этого в мире и построены сотни аэродинамических труб. Но и в этом случае теория размерностей уже сэко-



СА РК «Зонд-5» и «Зонд-6» первыми, после облета Луны, вошли в атмосферу Земли со второй космической скоростью. СА «Зонд-6», совершив «нырок», вышел из атмосферы с частично погашенной скоростью. Затем он вновь вошел в атмосферу и произвел управляемый спуск на территорию СССР. СА «Зонд-5» осуществил баллистический спуск и приводнился в акватории Индийского океана.

номила нам много усилий: не надо устанавливать, что сила пропорциональна плотности среды, площади поверхности аппарата, квадрату скорости движения.

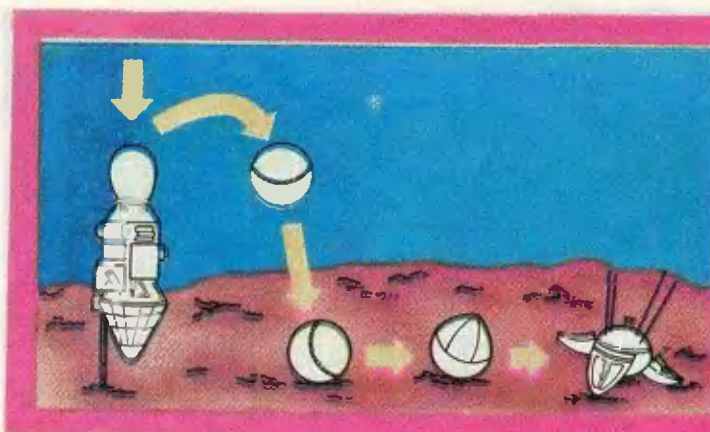
### Скачок уплотнения

Заметим, что мы в нашем рассмотрении представляли аппарат фактически как пластинку площади  $S$ , наклоненную под углом  $\alpha$  к потоку молекул, а скорости молекул считали одинаковыми по модулю и направлению — аппарат двигался намного быстрее теплового движения самих молекул. То, что происходило на тыльной подветренной стороне пластинки, нас не интересовало: молекулы туда не попадали, так что это пространство можно было бы заполнить, например, телом клина с тем же углом  $\alpha$  при вершине. Пусть теперь этот клин опускается в плотные слои атмосферы и движется все медленнее, но все еще быстрее средней тепловой скорости молекул и, следовательно, быстрее звука. (Ведь ясно, что такой организованный процесс, как звуковое возмущение, не может распространяться быстрее самих молекул, движущихся с тепловой скоростью.) Чтобы как можно сильнее тормозиться, давайте плоскость клина начнем наклонять на все больший угол по отношению к потоку (ведь сила сопротивления  $F_x \sim \sin^3 \alpha$ ). Тогда молекулы будут отскакивать от наветренной полуплоскости под все более прямым углом, и перед поверхностью

клина начнет образовываться сжатый слой. Когда плоскость расположится перпендикулярно потоку, молекулы, налетающие на клин вдали от его края, не будут успевать соскользнуть с него, начнется настоящая толчея; и набегающие молекулы (они ничего не знают о препятствии — ведь скорость больше скорости звука) с размаху будут врезаться в эту толщу молекул. У плоскости  $S$  возникнет сжатый слой, отделенный от невозмущенного газа так называемым прямым скачком уплотнения (рисунок 6). В этом скачке резко (на то он и скачок) падает скорость потока — от сверхзвуковой до медленной дозвуковой.

А что творится с температурой? Давайте сделаем оценку ее величины. Пусть тело движется очень быстро, ну, например, его скорость  $v$  (точнее,  $u = v$ ) в двадцать раз больше скорости звука  $c$ . Иными словами, отношение скорости потока  $v$  к скорости звука  $c$  равно  $M = 20$  (это отношение называется числом Маха), а каждая молекула в набегающем невозмущенном потоке обладает кинетической энергией, приблизительно равной  $\frac{mv^2}{2} = \frac{mc^2}{2} M^2$ . Внутри сжатого слоя молекулы почти неподвижны относительно тела; значит, их кинетическая энергия почти целиком перешла в тепловую, и для оценки температуры  $T_1$  в сжатом слое можно положить приближенно (для двухатомных молекул воздуха)

$$\frac{mc^2}{2} M^2 \approx \frac{5}{2} kT_1,$$



Первая мягкая посадка на Луну была совершена космическим аппаратом (КА) «Луна-9». На высоте около 75 км был включен тормозной двигатель, и КА начал снижение. Вблизи поверхности от тормозного отсека отделился сферический полевой груз. Коснувшись грунта и перекатившись, как самый обычный мяч, груз замер. После этого на его верхней полусфере раскрылись 4 лепестка антенн.



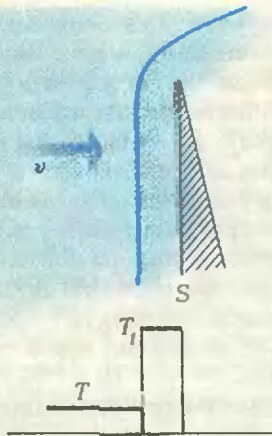


Рис. 6.  
откуда

$$T_1 \approx \frac{mc^2 M^2}{5k} = \frac{mN_A c^2 M^2}{5R} = \frac{\mu_B c^2 M^2}{5R}.$$

Принимая для воздуха молярную массу  $\mu_B = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль,  $c \approx 300$  м/с, получим:

$$T_1 \approx \frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot (300)^2 \cdot (20)^2}{5 \cdot 8,31} \text{ К} \approx 25 \text{ 000 К}.$$

Это что же получилось: в сжатом слое перед плоскостью, движущейся со скоростью 20 с, температура оказывается больше чем на поверхности Солнца! Это значит, что молекулы воздуха «развалятся» (диссоциируют) на отдельные атомы. А что еще? Сравним кинетическую энергию молекулы с энергией ионизации. В таблицах можно посмотреть, что энергия ионизации (в расчете на молекулу), например, для азота (основного компонента атмосферы) равна  $\phi = 2,5 \cdot 10^{-18}$  Дж. Оценим теперь в джоулях кинетическую энергию налетающей молекулы

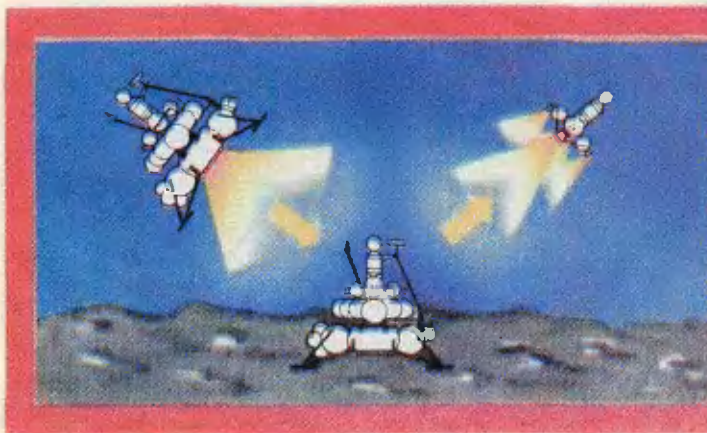
азота:

$$E = \frac{m_N c^2}{2} M^2 = \frac{1}{2} \cdot 4,7 \cdot 10^{-26} \cdot (300)^2 \times \\ \times (20)^2 \text{ Дж} \approx 0,85 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}.$$

Видно, что  $E$  и  $\phi$  сравнимы по порядку величины, — значит, можно ожидать и появления свободных электронов и ионов.

Конечно, на диссоциацию и ионизацию уйдет часть первоначальной кинетической энергии молекул, так что температура в сжатом слое станет несколько меньше, чем мы получили в нашей грубой оценке, но все равно она будет порядка тысячи градусов.

И хотя мы провели рассуждения об образовании сжатого слоя на примере плоскости, которую мы постепенно развернули поперек сверхзвукового потока, все это верно и для любого тела, у которого можно провести касательную плоскость, перпендикулярную потоку. Такие тела называются в аэродинамике затупленными. Но существования такой плоскости еще мало: чтобы скачок уплотнения был похож на тот, который мы уже изучили, надо еще, чтобы радиус кривизны тела вблизи этой касательной плоскости был достаточно большим — больше, чем толщина сжатого слоя; тогда этот скачок на некотором протяжении (поперек потока) будет похож на прямой. В качестве примера на рисунке 7 изображен шар, обтекаемый сверхзвуковым потоком. Видно, что в окрестности передней точки



КА «Луна-16» доставил на Землю грунт с поверхности Луны. Для этого КА совершил ряд динамических операций, в т. ч. выход на орбиту искусственного спутника Луны, сход с орбиты, мягкую посадку на поверхность Луны и старт с Луны к Земле. Возвращаемый аппарат «Луна-16» стал первым аппаратом, осуществившим две мягкие посадки — на Луну и на Землю.

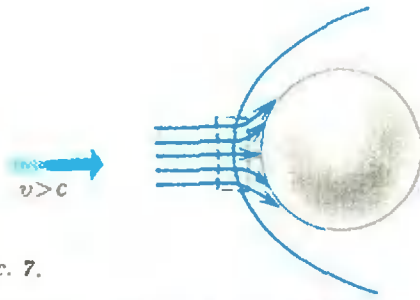


Рис. 7.

шара (точке торможения) и слой, и скачок действительно почти плоские — это место обведено пунктирным прямоугольником. Такие тела называются уж совсем обидно — тупыми. (В этом смысле, с точки зрения сверхзвуковой аэродинамики, любой человек, даже очень остроумный, является тупым телом.)

Итак, перед каждым затупленным телом в сверхзвуковом потоке образуется сжатый и сильно нагретый слой газа.

### Коридор входа, или Заключение

В начале статьи мы рассуждали о том, что если у планеты нет атмосферы или она есть, но очень разреженная, то для мягкой посадки, требующей торможения, придется затратить энергии почти столько же, сколько для выхода из ее поля тяготения. Но если есть атмосфера достаточной плотности, то можно сэкономить эту энергию (а значит, и связанную с ней массу первоначально запасенного топли-

ва), используя для торможения силу сопротивления  $F_x$ , а для поддержания в атмосфере — подъемную силу  $F_y$ . А что значит «достаточная плотность» атмосферы? И только ли плотность атмосферы должна войти в наши рассуждения? А размер планеты, ее масса (от которых зависит ускорение силы тяжести на поверхности), толщина атмосферы, ее состав? А характеристики самого аппарата?

Вот об этом сейчас мы и собираемся поговорить.

Итак, пусть аппарат массой  $M$ , имеющий площадь крыла  $S$ , движется со скоростью  $v$  в атмосфере Земли на высоте  $h$ , где плотность атмосферы равна  $\rho$ . Подъемная сила будет равна  $F_y = C_y \rho v^2 S$ . Облетая планету, аппарат движется по искривленной траектории. Пусть для простоты эта траектория близка к окружности радиусом  $R + h$  ( $R$  — радиус Земли); тогда центростремительное ускорение аппарата будет равно  $v^2 / (R + h)$ . Это ускорение определяется силой тяжести и подъемной силой  $F_y$ :

$$Mg - F_y = \frac{Mv^2}{R + h}.$$

Учитывая, что «толщина» атмосферы мала по сравнению с радиусом Земли, перепишем последнее уравнение в виде

$$C_y \rho v^2 S \approx M \left( g - \frac{v^2}{R} \right).$$

Отсюда прежде всего следует, что там, где уже почти нет атмосферы, т. е. плотность и, следовательно, подъ-



Автоматическая межпланетная станция (АМС) «Марс-3» совершила первую мягкую посадку на Марс. Отделившись от орбитального аппарата, СА вошел в разреженную атмосферу Марса (давление у поверхности — менее 0,01 атм). По мере спуска аппарата раскрылся, а затем отделился тормозной парашют, отстрелился тепловой экран, отработал основной парашют. Остаточную скорость погасил тормозной двигатель.



емная сила равны нулю, равна нулю и правая часть выражения. Тогда для скорости получается значение  $v_1 = \sqrt{Rg} = 7,8$  км/с — первая космическая скорость. А что происходит по мере снижения аппарата? Скорость аппарата будет уменьшаться под действием силы сопротивления  $F_x$ . Но по мере снижения быстро растет плотность атмосферы (см. формулу (1)). И, несмотря на падение скорости, подъемная сила  $F_y$  возрастает. И эту подъемную силу можно использовать, чтобы задержать «падение» аппарата. При этом летательный аппарат становится фактически планером, и действующая на него сила тяжести может быть уравновешена подъемной силой:

$$Mg = C_y \rho v^2 S.$$

Чтобы использовать эту возможность крылатого аппарата, лететь надо на таких высотах, где плотность атмосферы не меньше, чем  $\rho_{\min} \approx \frac{Mg/S}{C_y v^2}$  (числи-

тель этой дроби — сила тяжести, приходящаяся на единицу площади крыла, — называется нагрузкой на крыло, поэтому мы его выделили). А при помощи формулы (1) можно определить и ту предельную высоту, не ниже которой можно держаться «на крыле» при данной скорости полета  $v$ :

$$\frac{Mg/S}{C_y v^2} \approx \rho_0 e^{-\frac{h_{\max}}{h^*}} \Rightarrow \frac{h_{\max}}{h^*} \approx \ln \frac{\rho_0 C_y v^2}{Mg/S},$$

откуда

$$h_{\max}(v) \approx h^* \ln \frac{\rho_0 C_y v^2}{Mg/S}.$$

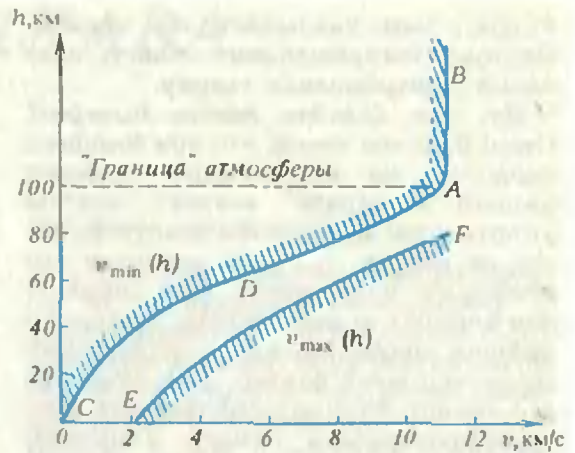


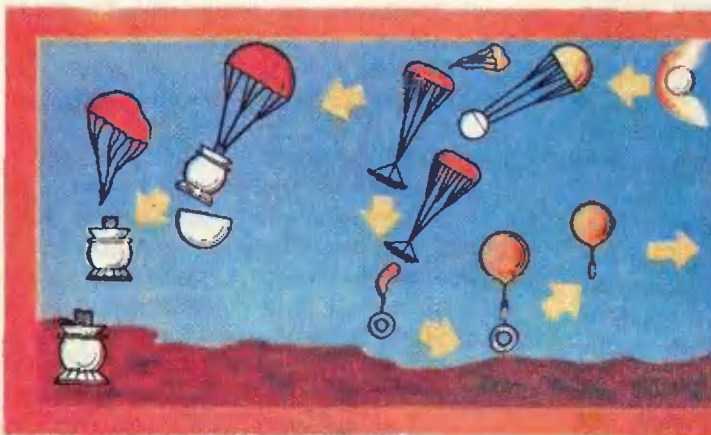
Рис. 8.

Другими словами, если мы хотим, чтобы на заданной высоте  $h$  аппарат «не проваливался», надо, чтобы его скорость была не меньше, чем

$$v_{\min}(h) \approx \sqrt{\frac{Mg/S}{C_y \rho_0} e^{\frac{h}{h^*}}}.$$

На рисунке 8 показана кривая  $BADC$ , соответствующая случаю входа в атмосферу Земли летательного аппарата, имевшего первоначально вторую космическую скорость  $v_{II} = 11,2$  км/с. Участок  $CD$  в нижних слоях атмосферы и описывается только что приведенной формулой.

Итак, мы получили кривую, выше которой аппарат не может поддерживаться атмосферой: при любой заданной скорости (меньше первой космической) подъемной силы будет не хватать, если мы заберемся на большую



Впервые мягкую посадку на Венеру осуществила АМС «Венера-7». Через 15 лет на поверхность планеты опустились СА АМС «Вега-1» и «Вега-2». Одновременно с этим исследования проводились специальными аэростатами, плававшими в атмосфере планеты (давление и температура у поверхности Венеры соответственно около 100 атм и 750 К).

высоту, чем указывает эта кривая. Поэтому «запрещенная» область значений заштрихована сверху.

Ну, так давайте лететь быстрее? Стоп! Ведь мы знаем, что при больших скоростях на затупленных кромках нашего аппарата «сядет» скачок уплотнения, за которым воздух (и даже не воздух, а смесь осколков его молекул) разогреется так сильно, что аппарат может сгореть. Это сложнейшая проблема входа в атмосферу — тепловой барьер. Как отводить это тепло? Можно использовать все: теплопроводность самого аппарата, которая позволяет теплу стекать «от носа в хвост», возможность его оплавления (и, значит, изменения формы), что делает аппарат еще «тупее»), тепловое излучение «раскаленных добела» частей аппарата и др.

Обсуждать эту проблему в целом мы здесь не будем, а для оценки допустимой скорости возьмем «самый худший» случай, когда все тепло, приносимое на аппарат воздухом, отводится с его поверхности только излучением.

Есть такой закон — закон Стефана — Больцмана, — согласно которому мощность, уносимая излучением с каждого квадратного метра площади, пропорциональна четвертой степени температуры:  $q = \sigma T^4 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$ . Коэффициент пропорциональности  $\sigma$  называется постоянной Стефана — Больцмана; его можно выписать из справочника по физике:  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}^4)$ . Это очень резкая зависимость: стоит температуру увеличить, например, втрое, как излучаемая энергия увеличится в  $3^4 = 81$  раз — почти в сто раз! Согласно этому закону получается, что для эффективного охлаждения излучением нужно «раскалиться добела».

Итак, оценим наибольшую скорость, с которой может двигаться аппарат, еще не плавясь. Масса воздуха, налетающего за единицу времени на единицу площади поверхности аппарата, равна  $\rho v$ . Приносимая этим воздухом энергия  $\rho v \frac{v^2}{2}$ . Почти вся эта

энергия переходит в тепло. И все это тепло, по предположению, уходит от аппарата за счет излучения, которое в единицу времени уносит с единицы площади энергию  $\sigma T^4$ . Итак, потребуем, чтобы температура поверхности не превышала температуры плавления  $T_{\text{пл}}$ . Тогда будем иметь

$$\frac{v^2}{2} \rho v \leq \sigma T_{\text{пл}}^4.$$

Таким образом, скорость аппарата не может быть больше определенного для каждой высоты значения  $v_{\text{max}}$ :

$$v \leq v_{\text{max}}(h) = \left[ \frac{2\sigma T_{\text{пл}}^4}{\rho(h)} \right]^{1/3}.$$

График зависимости  $v_{\text{max}}(h)$  на рисунке 8 — это кривая *EF*.

Итак, если мы хотим использовать «несущие и тормозящие» свойства атмосферы, т. е. садиться на планету на крылатом аппарате, не расходуя топливо на торможение, то в плоскости координат высота — скорость наша «траектория» не может проходить выше кривой *CDAB* (крылья не будут держать аппарат) и ниже кривой *EF* (сгорим!). Обе эти кривые построены для условий посадки на Землю. Видно, что с увеличением скорости расстояние между этими кривыми — ширина «коридора входа» — достигает минимального значения (значит, особенно на этой высоте нужно не ошибиться!), но, к счастью, эти кривые нигде не касаются и не пересекаются! Мудрая Природа предусмотрела возможность для разумных существ возвращаться на Землю на крылатых аппаратах.

# РОЖДЕНИЕ СПЛАВА

Кандидат физико-математических наук  
А. С. ШТЕЙНБЕРГ

*Явлений раздвинь грань,  
Земную разрушь клеть  
И яростный гимн грянь,  
Бунтующих тайн медь.*

О. Э. Манделъштам

Сегодня медь, такую привычную, трудно представить в роли металла «бунтующих тайн». Хотя «за плечами» у нее славная история. Медь первой из металлов попала на службу к человеку. Но из-за ее мягкости орудия наших далеких предков быстро тупились. На смену меди пришли более твердые и прочные бронзы — сплавы меди с оловом, мышьяком и другими элементами. А чистая медь надолго отступила в тень.

Новая волна интереса к древнему металлу была связана с его высокой электропроводностью. По этому показателю медь немного уступает только серебру, но не стоит забывать о его цене. Поэтому множество проводящих ток деталей изготавливается именно из меди. Но часто одной высокой электропроводности недостаточно...

Из какого металла следует изготавливать электрические контакты? Ясно, что они должны хорошо проводить ток, но, кроме того, желательно обеспечить их эрозионную стойкость. Слово «эрозия», может быть, не всем знакомо, но смысл его прост: так называется разрушение поверхности детали. Если материал недостаточно прочен, то в результате бесконечных замыканий и размыканий контакты потеряют свою форму и выйдут из строя.

То же самое сочетание высоких прочностных свойств (причем в широком диапазоне рабочих температур) и проводимости требуется для сварочных электродов, высокотемпературных проводников и т. д.

Можно ли обработать медь таким образом, чтобы ее удельное сопротивление почти не увеличилось, а прочность существенно возросла?

## Что такое прочность?

Под действием внешних сил материалы могут изменять свою форму — деформироваться. Но происходить это может по-разному. Если растянуть резинку и отпустить, она вновь сократится. Это — пример упругой деформации. А вот пластилин, наоборот, совершенно «себя не помнит» и послушно принимает в руках любые очертания. Такая деформация называется пластической.

Металлы ведут себя под действием нагрузки скорее как пластилин, чем как резина. Хотя деформировать их, конечно, намного труднее. Обычно вплоть до температуры плавления металлы имеют кристаллическое строение. Схематически разрез кристалла показан на рисунке 1. Там же показано, как под действием внешних сил две части кристалла могут сдвинуться друг относительно друга. Если нагрузку потом снять, кристалл так и останется в деформированном состоянии.

Медь мягкий металл потому, что в ней пластическая деформация происходит сравнительно легко. Но пред-

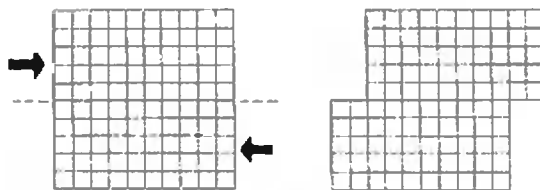


Рис. 1. Кристалл меди легко деформируется приложенными к нему внешними усилиями.

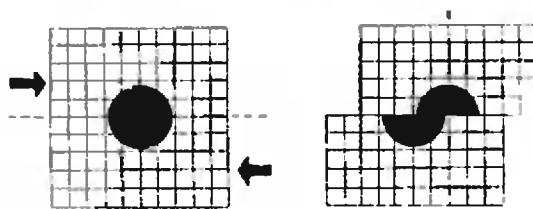


Рис. 2. Теперь линия срезки пересекает твердую частицу. Кристалл упрочняется.



ставьте себе, что в плоскости возможного сдвига нам удалось поместить частицу какого-либо другого, более твердого материала, как это изображено на рисунке 2. Тогда для осуществления пластической деформации придется приложить намного большие усилия. Это подсказывает нам способ упрочнения: надо ввести в кристаллы меди твердые инородные частицы. Рецепт далеко не нов, и возможно в детстве вы пользовались сходным приемом, упрочняя крепости из песка закопанными в стены камнями.

Эксперименты показывают, что для существенного упрочнения вполне достаточно 1—3 % объема занять упрочняющими частицами. Подавляющую часть объема сплава (97—99 %) будет занимать медь, и поэтому упрочнение не должно слишком серьезно сказаться на электропроводности — электроны могут по-прежнему перемещаться в меди. (Точно так же, как редкие острова — не помеха океанским путешествиям.)

Какие частицы порекомендовать в качестве упрочняющих? Решений много, но мы остановимся на оксидах. Их твердость хорошо известна. Кроме того, они плавятся при высоких температурах и в широком диапазоне температур сохраняют упрочняющие свойства. Но самое главное, что существует хороший способ ввести оксиды в «тело» меди.

Как же это сделать?

Решение совсем не очевидно. Наверное, не стоит даже объяснять, что «загонять» частицы оксида в медь механическим путем — весьма сложная и малопривлекательная задача. Значительно более соблазнительным кажется путь, когда частицы оксида образуются непосредственно внутри меди. Такой процесс носит название внутреннего окисления.

Вероятно, все представляют себе обычное окисление металлов. На всякий случай напомним, что это — химическая реакция, при которой атомы металла соединяются с атомами кислорода. Многие, наверное, замечали,

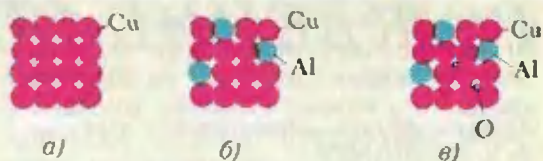


Рис. 3. В сплаве замещения атомы алюминия занимают позиции атомов меди.

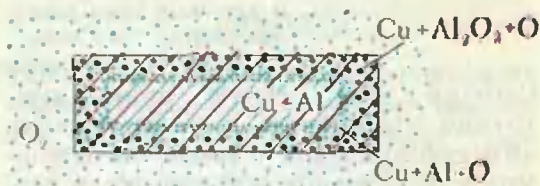


Рис. 4. Кислород диффундирует в медно-алюминиевый сплав.

что на старых медных или бронзовых изделиях в результате такой реакции образуется патина — пленка оксида зеленоватого или коричневатого цвета. Ну а самым известным случаем окисления, без сомнения, является горение вещества.

Однако внутреннее окисление — более тонкая процедура. Прежде чем ее описывать, необходимо разобраться в некоторых вопросах строения сплавов.

Чистая медь представляет собой правильную кристаллическую структуру, т. е. ее атомы занимают друг по отношению к другу строго определенные позиции (рисунок 3, а). А какова структура сплава меди, например, с алюминием? Та же самая кристаллическая решетка, одни узлы которой заняты атомами меди, а другие — алюминия. Примерно как на рисунке 3, б. Это — так называемый сплав замещения. Атомы алюминия просто замещают в кристаллической решетке атомы меди.

Добавим теперь к этому сплаву еще и кислород. Где будет его место? Радиус атома кислорода сравнительно невелик (здесь просим поверить на слово), и ему очень удобно занять позицию в междоузлии — т. е. не в узлах кристаллической решетки, а между ними, как показано на рисунке 3, в. Это — уже пример сплава внедрения. Атомы кислорода внедряются между атомами металла.



Сплав меди с алюминием изготовить легко. Для этого надо взять оба компонента в нужной пропорции, вместе их расплавить, перемешать жидкость и дать ей остыть и закристаллизоваться.

Получится примерно то, что изображено на рисунке 3, б. Как теперь добавить кислород?

Поместим медно-алюминиевый сплав в газовую атмосферу, содержащую кислород. Хотя бы просто в воздушную среду. Диффундируя, молекулы газа будут заполнять пространство между атомами металлов.

Ну хорошо. Сплав меди с алюминием и кислородом мы приготовить сможем. А что дальше? Здесь пора раскрыть идею нашего плана. Алюминий имеет, как говорят химики, большее сродство к кислороду, чем медь. Иначе говоря, он легче окисляется. Значит, можно попытаться создать условия, когда алюминий бы окислялся, а медь — нет. Тогда частицы оксида алюминия образовывались бы внутри меди, и наша цель была бы достигнута. Кстати говоря, совершенно необязательно брать для этих целей именно алюминий. Можно остановить выбор на любом другом металле с большим сродством к кислороду, чем медь. Подходят титан, гафний, цирконий, никель, олово и т. д.

Вы, скорее всего, видели, как даже в сухую погоду гаснет костер у неумелого туриста. Если дрова беспорядочно навалены в кучу, доступ кисло-

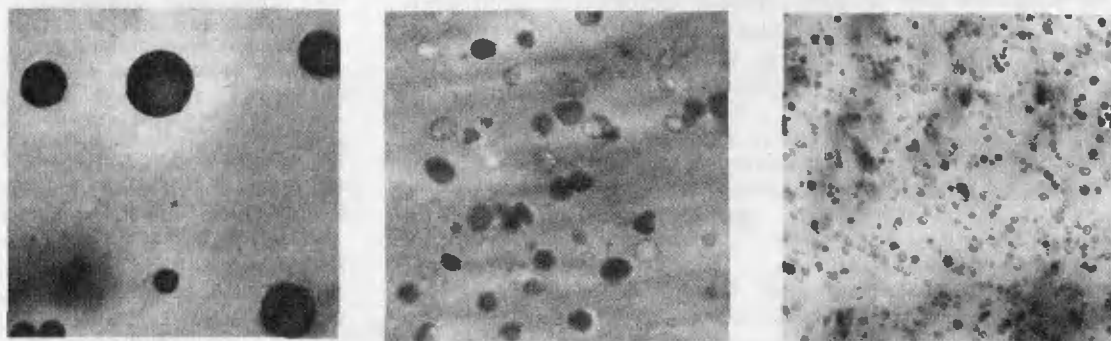
рода к горящему веществу затруднен, и реакция может прекратиться. Это не означает, что внутри плохо сложенного костра вообще нет кислорода. Конечно, он проникает туда через многочисленные щели. Но его может оказаться недостаточно.

Мы подходим к очень важному выводу. Химическая реакция — явление «пороговое». Для ее протекания необходимо создать некоторую минимальную (выше «порога») концентрацию реагирующих веществ. Иначе реакция не пойдет.

С проявлением этого принципа мы сталкиваемся каждый день. Тщательный химический анализ показывает, что вокруг нас и в нас самих присутствуют почти все элементы периодической таблицы. К счастью, их концентрации, как правило, ниже «пороговых», и они между собой не реагируют. А иначе нашу жизнь было бы трудно себе вообразить...

Вернемся к металлам. Реакция окисления алюминия идет легче, чем реакция окисления меди, потому, что для нее ниже «порог» кислородной концентрации. Значит можно подобрать такую концентрацию кислорода в газовой атмосфере, что алюминий еще будет окисляться, а медь — уже нет.

Теперь, наконец, рассмотрим процесс внутреннего окисления в целом. Исходный образец представляет собой сплав замещения алюминия в меди, в котором доля алюминия не превы-



Эти фотографии сделаны с помощью электронного микроскопа. Так выглядят образцы сплавов на основе меди после внутреннего окисления. Упрочняющие частицы —  $\text{SiO}_2$ , диаметр частиц  $d \approx 1000 \text{ \AA}$  (фото а, увеличение 100 000) и  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $d \approx 150 \text{ \AA}$  (фото б, увеличение 200 000) и  $d \approx 50 \text{ \AA}$  (фото в, увеличение 200 000). Чем мельче частицы, тем прочнее материал.

шает, как правило, процента. Этот образец помещается в камеру, где поддерживается специально подобранная концентрация кислорода, при которой окисляться может только алюминий. Атомы кислорода начинают диффундировать в образец. У его края образуется сплав из трех элементов — меди, алюминия и кислорода. Начало процесса схематически представлено на рисунке 4.

В зоне тройного сплава происходит реакция окисления алюминия. При этом атомы алюминия и кислорода покидают кристаллическую решетку меди и «организуют» свою самостоятельную фазу — оксид  $Al_2O_3$ . Междузлия медной решетки освобождаются, и в них извне поступают свежие порции кислорода. А вот запас алюминия на краю образца вскоре истощится. Вся внешняя зона окажется упрочненной оксидом, и процесс окисления пойдет дальше — в глубь образца, куда с поверхности будет непрерывно «подкачиваться» кислород. Когда зона реакции пройдет через весь образец, процесс закончится: весь алюминий окажется полностью переведенным в окисел\*).

Оксид внутри меди образуется в виде очень мелких частиц размером порядка сотен ангстрем ( $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ см}$ ). Они хорошо видны в электронный микроскоп.

К этому следует еще добавить, что весь процесс имеет смысл проводить

\*) Точнее говоря, алюминия останется очень мало, его концентрация станет ниже «пороговой».

при повышенных температурах. Как известно, температура является мерой средней кинетической энергии молекул или атомов. С повышением температуры кислород приобретает большую подвижность, и весь процесс значительно ускоряется во времени.

### Вместо заключения

Вооружимся теперь цифрами: эксперимент показывает, что электропроводность внутренне окисленного материала составляет 80—90 % электропроводности чистой меди, зато срок службы изделий увеличивается в десятки раз. И в «старой, доброй» меди — еще немало «бунтующих тайн»!

Сплав, о котором мы рассказали, прошел долгий путь от исследования физических основ процесса и создания его математических моделей до промышленного выпуска. Сейчас создается аналогичный материал на основе платины. Но он будет значительно прочнее, чем чистая платина. Его внедрение позволит сэкономить немало драгоценного металла.

Снаружи внутренне окисленная медь ничем не отличается от чистой меди, а внутренне окисленная платина — от чистой платины. И смотря на гладкую немую поверхность металла, мы порой не подозреваем, какие он хранит секреты, как сложен был его «жизненный путь», сколько людей приложили руку к тому, чтобы он существовал и верно нес свою службу.

## Вниманию наших читателей!

Магазин «Академкнига» г. Кишинева высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л. *Заочные математические олимпиады*. — 1986. — 30 к.

Климишин И. А. *Астрономия наших дней*. — Издание 3-е, переработанное и дополненное. — 1986. — 2 р. 30 к.

Майер В. В. *Полное отражение света в простых опытах*. — 1986. — 25 к.

Сикорук Л. Л., Шпольский М. Р. *Любительская астрофотография*. — (Библиотека любителя астрономии). — 1986. — 30 к.

Силин А. А. *Трение и мы*. — (Библиотека

«Квант»)-1987. — 35 к.

Тихомиров В. М. *Рассказы о максимумах и минимумах*. — (Библиотечка «Квант»)-1986. — 35 к.

Шарыгин И. Ф. *Задачи по геометрии. Планиметрия*. — Издание 2-е, переработанное и дополненное. — (Библиотечка «Квант»)-1986. — 45 к.

Заказы на книги направляйте по адресу: 227012 Кишинев, пр. Ленина, 148, магазин «Академкнига».

# Задачник „Кванта“

## Задачи

M1101—M1105, Ф1113—Ф1117

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 августа 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5 — 88» в номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1101» или «Ф1113». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

**M1101.** На боковых сторонах  $AB$  и  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  найдены такие точки  $D$  и  $E$  соответственно, что  $AD=BC=EC$  и треугольник  $ADE$  равнобедренный. Каким может быть угол при вершине  $A$ ?

*В. Кириак (Румыния)*

**M1102.** Докажите, что существуют  $n$  различных натуральных чисел, сумма кубов которых равна кубу натурального числа, если а)  $n=3$ , б)  $n=4$ , в)  $n$  — любое натуральное число, большее 2.

*Л. Д. Курляндчик*

**M1103.** а) На бесконечной плоскости, разбитой на квадратные клетки, некоторое — быть может бесконечное — количество прямоугольников размером  $1 \times 2$  закрашены в черный цвет так, что никакие два черных прямоугольника не имеют общих точек (даже вершин). Докажите, что оставшуюся часть плоскости можно замостить этими прямоугольниками.

б)\* Пусть на клетчатой плоскости закрашены несколько прямоугольников размером  $m \times n$ , не имеющих общих точек. Докажите, что если  $mn$  четно, то оставшаяся часть плоскости можно замостить прямоугольниками размером  $1 \times 2$ , а если  $mn$  — нечетно, то это не всегда возможно.

*М. Хованов, ученик 10 класса*

**M1104.** В тетраэдре  $ABCD$  грани  $ABC$  и  $BCD$  перпендикулярны,  $\angle BAC=90^\circ$ . Докажите, что из отрезков, длины которых равны произведениям длин противоположных ребер тетраэдра, можно составить прямоугольный треугольник.

*В. Н. Дубровский*

**M1105.** После нескольких прямолинейных разрезов поверхность выпуклого многогранника развернули на плоскость. Получился многоугольник, для которого известно, какие точки его границы «склеиваются», т. е. отвечают одной и той же точке на поверхности многогранника. Каким был исходный многогранник, если при разрезании получился

а) прямоугольник со сторонами 1 и  $\sqrt{3}$ ,

б) равнобедренный треугольник с углом  $120^\circ$ , причем в обоих случаях склеиваются точки каждой стороны, симметричные относительно ее середины.

*Н. П. Долбилли, М. И. Штогрин*

**Ф1113.** Шар радиусом  $R$  может свободно вращаться на закрепленной горизонтально оси  $OO'$ . Под шаром, прижимаясь к нему, движется шероховатая жесткая лента, изогнутая в виде полуцилиндра радиусом  $R$  (рис. 1). Скорость ленты  $v$  направлена горизонтально и перпендикулярно оси  $OO'$ . Чему равна установившаяся скорость вращения шара?

*Л. Г. Маркович*



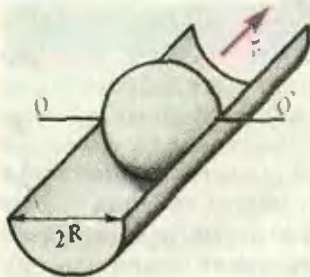


Рис. 1.

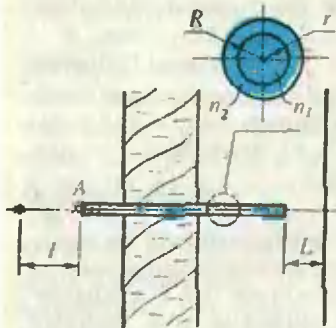


Рис. 2.

## Задачник „Кванта“

Ф1114. Каскадер падает с высоты  $H=50$  м. К нему пристегнут резиновый шнур, второй конец которого закреплен в месте старта. Длина и жесткость шнура подобраны так, что у земли скорость гасится до нуля. После того как затухли колебания, каскадер повис на высоте  $h=10$  м над землей. Какова была максимальная скорость каскадера во время падения? Сопротивление воздуха не учитывать.

Д. В. Павлов

Ф1115. Закрытый сосуд, заполненный газом, разделен на две части непроницаемым горизонтальным поршнем; масса сосуда  $m$ , масса поршня  $M$ . Вначале сосуд покоится на подставке. Затем подставку толчком выбивают из-под сосуда. С каким ускорением начнет двигаться сосуд? Трением между стенками сосуда и поршнем пренебречь.

С. Ф. Ким, А. И. Латышкин

Ф1116. В две одинаковые химические пипетки набирают до одного и того же уровня воду: в одну — холодную, в другую — горячую. Пипетки опорожняют и считают при этом капли. Из какой пипетки упадет больше капель?

А. И. Буздин

Ф1117. Свет от точечного источника  $A$  выводится сквозь непрозрачную стенку с помощью световода — тонкой прозрачной палочки с радиусом сечения  $R$  (рис. 2); внутренняя часть палочки с радиусом  $r$  ( $R-r \ll r$ ) сделана из материала с показателем преломления  $n_1$ , а внешняя оболочка — из материала с показателем преломления  $n_2$  ( $n_2 < n_1$ ). Определите диаметр светового пятна на экране, расположенном на расстоянии  $L$  от правого торца световода. Источник света находится вблизи центра левого торца световода.

Как изменится размер пятна, если источник удалить вдоль оси световода на расстояние  $l$  от торца?

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

## Problems

M1101—M1105, P1113—P1117

M1101. There are points  $D$  and  $E$  on the equal sides  $AB$  and  $AC$  (respectively) of the isosceles triangle  $ABC$  such that  $AD=BC=EC$  and the triangle  $ADE$  is isosceles. What can be said about  $\angle A$ ?

V. Chiriac (Rumania)

M1102. Prove that there exist  $n$  distinct natural numbers whose sum of cubes is the cube of a natural number, if a)  $n=3$ , b)  $n=4$ , c)  $n$  is any natural number greater than 2.

L. D. Kuriyandchik

M1103. In the infinite plane, divided into equal little squares, there is a certain quantity (perhaps infinite) of black  $1 \times 2$  rectangles without common sides or vertices.

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (\*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions

of problem from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than August 1st, 1988, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write **NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS)**. Please print your name and address in **BLOCK LETTERS**.

## Задачи "Кванта"

Prove that the rest of the plane can be filled up by  $1 \times 2$  rectangles.

b)\* Suppose a certain number of  $m \times n$  rectangles in the squared plane (without common sides or vertices) are painted black. Prove that if  $mn$  is even, the remaining white part of the plane may be filled by  $1 \times 2$  rectangles, while this is not always possible if  $mn$  is odd.

*M. Khovanov, 10th form pupil*

**M1104.** The faces  $ABC$  and  $BCD$  of the tetrahedron  $ABCD$  are perpendicular and  $\angle BAC = 90^\circ$ . Prove that a right triangle may be constructed using segments whose lengths are equal to the products of the tetrahedron's opposite edges.

*V. N. Dubrovski*

**M1105.** After several rectilinear cuts along the surface of a convex polyhedron, the surface is spread out on the plane and a polygon is obtained. It is known what points of the polygon's boundary are glued together, i. e. correspond to the same point on the polyhedron's surface. Describe the initial polyhedron, if the polygon obtained by cutting and spreading out is

a) a rectangle with sides 1 and  $\sqrt{3}$ ,

b) an isosceles triangle with an angle of  $120^\circ$ , if in both cases the points glued together are pairs of points on the same side symmetric with respect to its midpoint.

*N. P. Dolbilin, M. I. Shtogrin*

**P1113.** A ball of radius  $R$  can rotate freely about a fixed horizontal axis  $OO'$ . A rough rigid ribbon bent in the form of a half cylinder of radius  $R$ , pressed against the ball from below, moves with velocity  $v$  directed horizontally and perpendicularly to the axis  $OO'$  (figure Pnc. 1). What is the established velocity of the ball's rotation?

*L. G. Markovich*

**P1114.** A stunt man falls from the height  $H = 50m$ . He is tied to a rubber rope whose other end is fixed at the jump-off point. The length and rigidity of the rope are chosen so that the speed at ground level is zero. After the oscillations cease, the stunt man hangs at the height  $h \approx 10m$  above the ground. What was the stunt man's maximal downward velocity? Air resistance is negligible.

*D. V. Pavlov*

**P1115.** A closed receptacle, filled with gas, is separated into two parts by an impenetrable horizontal piston; the receptacle's mass is  $m$ , that of the piston is  $M$ . Initially the receptacle stands on a support, which is then knocked out from under it. What will the acceleration of the receptacle be? There is no friction between the receptacle's walls and the piston.

*S. F. Kim, A. I. Latynin*

**P1116.** Two identical pipettes are filled with water to the same level: hot water in one, cold in the other.

*(Продолжение см. на с. 34)*

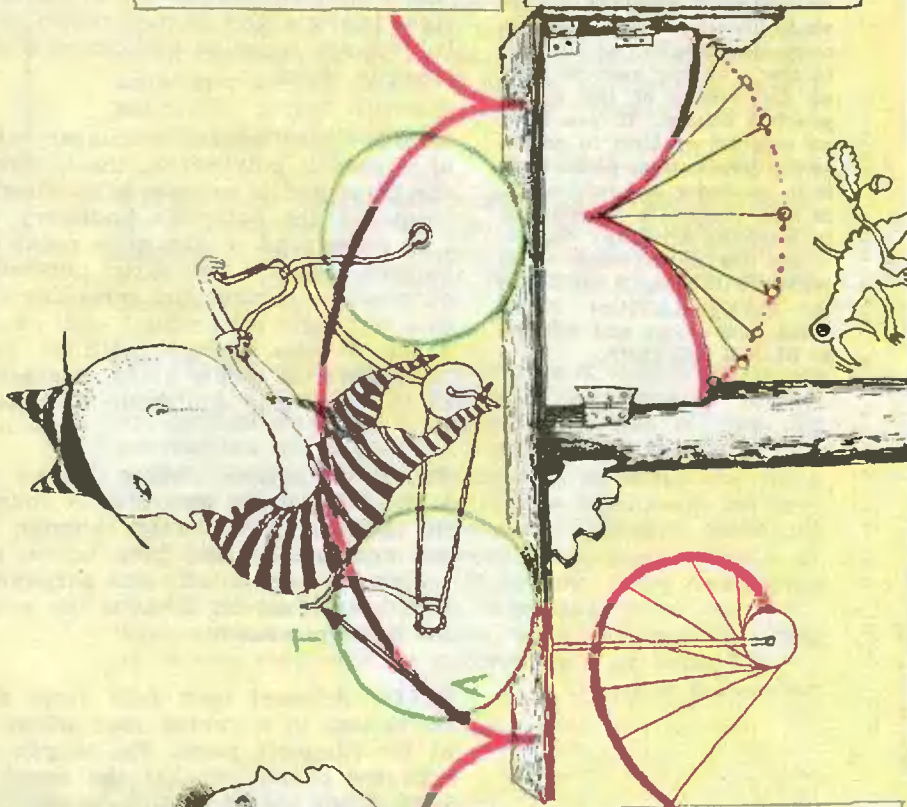
## Замечательные линии и точки. Циклоида

*1885*  
Циклоида — это кривая, которую можно определить как траекторию точки, лежащей на границе круга, катящегося без скольжения по прямой. Эту же траекторию описывает и лампочка, которую умельцы-малчишки прикрепляют к ободу велосипедного колеса. Название «циклоида» принадлежит Галилею.

*1886*  
Галилей экспериментально установил, что площадь под одной аркой циклоиды в три раза больше площади производящего ее круга. Он вырезал циклоиду из соответствующей пластинки металлической пластины и сравнил их массы. Ученник Галилея Торричелли определил площадь циклоиды, используя кинематические соображения.

Касательная в точке А циклоиды проходит через верхнюю точку Т соответствующей производящей окружности. Именно по этой касательной, а не по касательной к окружности, летит с колеса капля воды на спину велосипедиста, если колесо не закрыто крылом.

Подвесим маятник в острие перевернутой циклоиды, сделаем длину нити равной половине длины арки циклоиды и разрежем нити на маляты ватся на циклоидалятник будет двигаться по циклоиде, а период колебания не будет зависеть от величины начального отклонения (т.е. это «идеальный маятник»).





1999

Уравнение циклоиды удобно записывать через  $\alpha$  — угол поворота окружности, выраженный в радианах.

$$x = r\alpha - r \sin \alpha,$$

$$y = r - r \cos \alpha.$$

Заметим, что  $\alpha$  также равняется пути, пройденному производящей окружностью по прямой.

Если с горки, построенной в форме перевернутой циклоиды, спускаться на санях, то время, необходимое для достижения нижней точки горки, не зависит от того, с какого места начинать спуск. Кроме того, спуск по циклоидальной горке из одной точки в другую занимает меньше время, чем по горкам, имеющим другую форму.

Запиши в клетки цифры, чтобы изобразить на рисунке цифротак, чтобы во всех вертикальных и горизонтальных полосках из трех клеток стояли различные трехзначные числа, выходящие на 1 квадрат.

А	Х	А	+	Е
Х	-	-	-	+
О	+	М	-	Т
+	+	+	+	+
П	+	У	-	Й



Оригинальное доказательство теоремы Галилея дали в 1634 году Роберваль и независимо от него Декарт и Ферма. В 1658 году английский математик Рен установил, что длина дуги арки циклоиды равна четырем диаметрам производящего круга. Все эти исследования производились с помощью специальных геометрических приемов.

Если на выпуклую плоскую кривую наматывать нитку, закрепить кривую на плоскости и сматывать ее в натяжении, то конец нитки будет описывать кривую, которая называется эвольвентой данной кривой. Теперь ясно, что эвольвентой циклоиды будет вновь циклоида.

Одной из замечательных кривых является эвольвента окружности. По ней ходил бы пушкинский кот ученый, если бы он был привязан «золотую цепью» к круглому стволу дуба, и цепь была бы натянута.



Какие цифры нужно подставить вместо букв слова ПОДУМАЙТЕ (используя каждую цифру только один раз), чтобы получились арифметические действия в каждой строке, в каждой столбце (сверху вниз) и по всем диагоналям (слева направо)? Квадрат равенный 10?

## Задачник „Квант“

The water is dripped out of the pipettes and the drops counted. Which pipette will yield the most drops?

A. I. Buzdin

**P1117.** Light from a point source  $A$  is carried through a non-transparent wall by means of a light conductor: a thin transparent stick with circular section of radius  $R$  (figure Рис.); the inner part of the stick of radius  $r$  ( $R-r \ll r$ ) is made of a material of refraction index  $n_1$ , the outer envelope — of material with refraction index  $n_2$  ( $n_2 < n_1$ ). Determine the diameter of the light spot obtained on a screen placed at the distance  $L$  from the right end of the light conductor. The source  $A$  is placed next to its left end, near the latter's middle. How will the size of the spot change, if the source is moved away from the conductor along its axis to the distance  $l$ ?

E. N. Yunosov, I. V. Yaminski

## Решения задач

M1081—1085, Ф1093—1097

**M1081.** Докажите, что предпоследняя цифра числа  $3^n$  при любом натуральном  $n > 2$  четна.

Будем считать, что у однозначного числа «предпоследняя цифра» равна 0.

Если число  $N$  кончается цифрами  $ab$ , то, очевидно, две последние цифры числа  $3N$  совпадают с двумя последними цифрами числа  $3(10a+b) = 30a+3b$ . Поэтому при четном  $a$  предпоследние цифры чисел  $3N$  и  $3b$  будут одной и той же четности. Выпишем несколько первых степеней 3:

$$3^1=3, 3^2=9, 3^3=27, 3^4=81.$$

Их последние цифры — 3, 9, 7, 1; дальше они будут периодически повторяться. Предпоследние цифры чисел  $3 \cdot 3=9, 3 \cdot 9=27, 3 \cdot 7=21, 3 \cdot 1=3$  — четные, следовательно, если утверждение задачи справедливо для  $3^n$ , то оно справедливо и для  $3^{n+1}$ . А так как оно верно для  $3^3=27$ , по индукции заключаем, что оно верно и для всех натуральных  $n > 2$ .

В. И. Плачко

**M1082.** В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  диагонали пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что равенство

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$$

выполнено тогда и только тогда, когда либо диагонали  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны, либо одна из них делится точкой  $O$  пополам.

Запишем теорему косинусов для треугольников  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  и  $DOA$ , полагая  $\angle AOB = \alpha$  (и тем самым  $\angle BOC = \pi - \alpha$ ; см. рисунок):

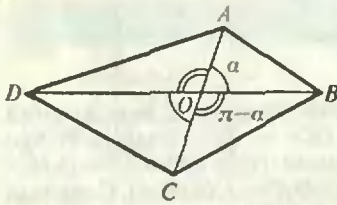
$$\begin{aligned} AB^2 &= AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos \alpha, \\ BC^2 &= BO^2 + CO^2 + 2BO \cdot CO \cos \alpha, \\ CD^2 &= CO^2 + DO^2 - 2CO \cdot DO \cos \alpha, \\ DA^2 &\neq DO^2 + AO^2 + 2DO \cdot AO \cos \alpha. \end{aligned}$$

Сложим эти равенства и перенесем квадраты отрезков диагоналей в левую часть:

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2) &= \\ = 2 \cos \alpha (-AO \cdot BO + BO \cdot CO - CO \cdot DO + DO \cdot AO) &= \\ = 2 \cos \alpha (BO - DO)(CO - AO). \end{aligned}$$

Равенство из условия равносильно тому, что последнее

## Задачник „Кванта“



полученное выражение равно нулю, поэтому или  $\cos \alpha = 0$ , и следовательно, диагонали  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны, или  $BO = DO$ , или  $CO = AO$ , т. е. одна из диагоналей делится точкой  $O$  пополам.

А. П. Савин

**М1083.** Наибольшее из неотрицательных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  равно  $a$ .

а) Докажите неравенство 
$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \leq$$

$$\leq \left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 + \frac{a^2}{4}.$$

б) Когда в нем достигается равенство?

а), б) Положим  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n = m$ , тогда

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} - m^2 \leq am - m^2 = \frac{a^2}{4} - \left( \frac{a}{2} - m \right)^2 \leq \frac{a^2}{4},$$

поскольку  $a_i^2 \leq a \cdot a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Тем самым доказано неравенство а).

Равенство в нем достигается тогда и только тогда, когда, во-первых,  $a_i^2 = a \cdot a_i$ , т. е. при каждом  $i$  либо  $a_i = 0$ , либо  $a_i = a$ , и, во-вторых,  $m = a/2$ . А это возможно только в двух случаях: 1) все  $a_i$  равны 0; 2)  $n$  четно и  $n/2$  чисел  $a_i$  равны 0, а остальные  $n/2$  равны  $a$  ( $a > 0$ ).

Таким же способом можно доказать следующее — более общее — неравенство:  $p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2 + \dots + p_n a_n^2 \leq$   

$$\leq (p_1 a_1 + \dots + p_n a_n)^2 + (\alpha - 1) \alpha^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} a^\alpha$$
 при  $p_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ ,  $\alpha > 1$ ,  $0 \leq a_i \leq a$ .

Л. Г. Ханин

**М1084.** Две окружности на плоскости пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Докажите, что можно выбрать такую точку  $C$ , что любая окружность с хордой  $AC$  будет пересекать данные окружности (второй раз) в точках, одинаково удаленных от  $C$ .

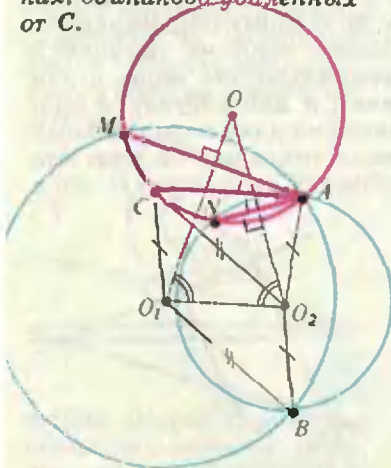


Рис. 1.

Обозначим через  $O_1$  и  $O_2$  центры данных окружностей. Построим треугольник  $O_1 B O_2$  до параллелограмма (рис. 1) и докажем, что его четвертая вершина  $C$  ( $O_1 C = B O_2$ ) и есть искомая точка.

Пусть  $O$  — центр произвольной окружности, проходящей через  $A$  и  $C$ ,  $M$  и  $N$  — точки ее пересечения с окружностями  $O_1$  и  $O_2$ . Равенство  $CM = CN$  равносильно равенству дуг  $CM$  и  $CN$  окружности  $O$ , которое, в свою очередь, равносильно тому, что прямая  $AC$  образует равные углы с прямыми  $AM$  и  $AN$  (т. е. либо  $\angle CAM = \angle CAN$  — рисунок 1, либо  $\angle CAM + \angle CAN = 180^\circ$  — рисунок 2). Общая хорда  $AM$  окружностей  $O$  и  $O_1$  перпендикулярна их линии центров  $OO_1$ ; аналогично, хорда  $AN$  перпендику-

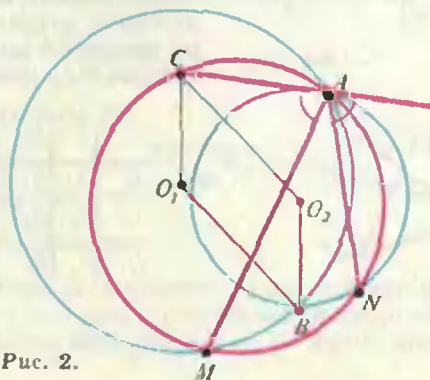


Рис. 2.



# Задачник „Квант“

лярна  $OO_2$ . Поэтому достаточно доказать, что прямая  $AC$  образует равные углы с  $OO_1$  и  $OO_2$ . Заметим, что  $ACO_1O_2$  — равнобочная трапеция (так как  $O_1C=O_2B=O_2A, O_2C=O_1B=O_1A$ , т. е.  $\triangle O_1O_2C=\triangle O_2O_1A$ ). Следовательно, прямая  $AC$  параллельна  $O_1O_2$ . Остается заметить, что  $\angle OO_1O_2=\angle OO_2O_1$ , ибо точка  $O$  лежит на среднем перпендикуляре к отрезку  $AC$  ( $OA=OC$ ), а значит, — и к отрезку  $O_1O_2$ .

В. Ю. Протасов

**М1085\***. Несколько попарно скрещивающихся прямых, расположенных в пространстве, проектируются на горизонтальную плоскость. Их проекции изображены так, чтобы в точках пересечения было видно, какая точка расположена выше, а какая ниже. Может ли получиться проекция, изображенная на рисунке 1а, б, в?

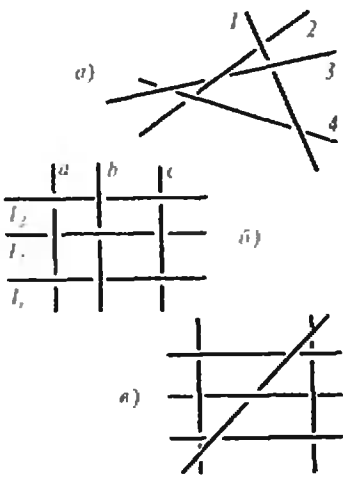


Рис. 1.

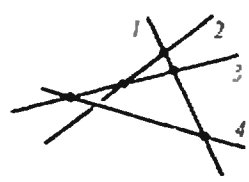


Рис. 2.

а) Ответ: нет. Допустим, что требуемое расположение (рис. 1, а) существует. Ясно, что прямую 1 можно опустить в вертикальной плоскости, не задевая прямую 3, так, чтобы она пересекла прямые 2 и 4, затем аналогично опустить прямую 3 так, чтобы она пересекла прямые 1 и 4 и, наконец, повернуть прямую 2 в вертикальной плоскости вокруг точки ее пересечения с прямой 1 так, чтобы она пересекла прямую 3. При этом прямая 2 по-прежнему будет проходить под прямой 4 (рис. 2). Но в то же время прямые 2 и 4 должны пересекаться, так как каждая из них пересекает прямые 1 и 3, и следовательно, все четыре прямые должны лежать в одной плоскости. Противоречие.

б) Ответ: нет. Снова допустим, что рассматриваемая конфигурация возможна. Обозначим прямые через  $a, b, c, l_1, l_2$  и  $l_3$  (см. рис. 1, б). Передвигая их в вертикальных плоскостях, как в пункте а), мы можем добиться, чтобы каждая из прямых  $a, b, c$  пересекала каждую из прямых  $l_1, l_2, l_3$  (рис. 3). Пусть  $A_1, A_2, \dots, C_1, C_2$  — точки пересечения прямых  $a$  и  $l_1, a$  и  $l_2, \dots, c$  и  $l_2$ ; теми же буквами обозначаются и изображения этих точек на нашей картинке. Спроектируем всю конфигурацию на вертикальную плоскость  $\lambda$ , содержащую прямую  $l_3$ , вдоль прямой  $c$  (рис. 4). Прямая  $c$  при этом проектируется в точку  $C$ . Докажем, что эта точка лежит на прямой  $l_3$  — это бы означало, что  $c$  и  $l_3$  пересекаются, и противоречило предположению. Вертикальные плоскости, содержащие прямые  $a, b$  и  $c$ , параллельны (так как  $a \parallel b \parallel c$  на рисунках 1, б и 3), поэтому и проекции  $a$  и  $b$  вдоль  $c$  параллельны. Кроме того, на рисунке 3  $A_1A_2:A_2A_3=B_1B_2:B_2B_3$ , следовательно, это верно и для самой конфигурации, а значит, и для рисунка 4 (при параллельной проекции отношения длин параллельных отрезков сохраняются). Отсюда очевидно следует, что на рисунке 4 прямая  $A_3B_3$  проходит через точку  $C$ , что и требовалось доказать.

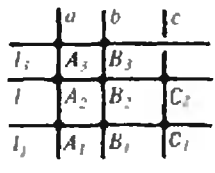


Рис. 3.

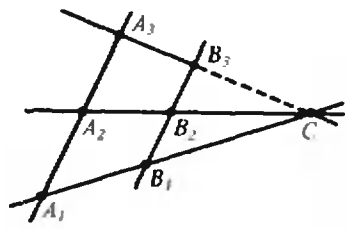


Рис. 4.

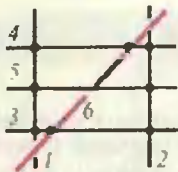


Рис. 5.

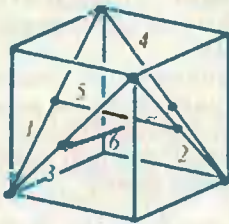
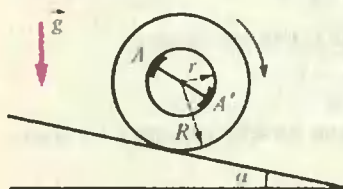


Рис. 6.

**Ф1093.** Автомобиль массой  $m=1200$  кг, тормозя при выключенной передаче, катится вниз с постоянной скоростью по наклонному участку шоссе с углом наклона  $\alpha$  ( $\sin \alpha = \frac{1}{14}$ ). Каждое из четырех колес автомобиля имеет внешний радиус  $R$  и жестко скреплено с тормозным барабаном радиусом  $r = \frac{5}{12} R$ , к которому прижимаются с одинаковой силой  $N$  тормозные колодки  $A$  и  $A'$  (см. рисунок). Найти  $N$ , если коэффициент трения скольжения между барабаном и колодками  $k=0,4$ . Проскальзывание между шинами и шоссе отсутствует.



**Ф1094.** Узкая трубка постоянного сечения образует квадрат со стороной  $l$ ,

## Задача „Кванта“

в) Ответ: да. Если мы сумеем построить конфигурацию, проекция которой показана на рисунке 5, то, чуть-чуть приподняв (параллельным переносом) прямую 6, опустив прямую 5, а за ней — прямые 1 и 2, получим рисунок 1, в. Возьмем в качестве прямых 1, 2, 3 и 4 диагонали боковых граней куба (рис. 6), прямую 5 проведем через середины диагоналей 1 и 2, а прямую 6 проведем через точки на диагоналях 3 и 4, расположенные чуть ниже их середин. Проекция этих прямых на основание куба дает рисунок 5.

Предлагаем читателям придумать по возможности более общие условия существования конфигураций скрещивающихся прямых, заданных их проекциями. Это интересная, но, видимо, довольно трудная задача на исследование.

С. Л. Табачников

Если бы на колеса автомобиля не действовали тормозные колодки, то при отсутствии проскальзывания между шинами и шоссе автомобиль спускался бы по склону ускоренно. При этом на пути  $S$  он «набирал» бы кинетическую энергию  $\Delta K$ , и согласно закону сохранения энергии

$$\Delta K = mgS \sin \alpha,$$

где  $mgS \sin \alpha$  — изменение потенциальной энергии.

По условию задачи скорость автомобиля не меняется. Это означает, что работа  $A$  сил трения (между тормозными барабанами и колодками) на пути  $S$  как раз равна  $mgS \sin \alpha$ . Найдем работу  $A$ .

Если автомобиль прошел путь  $S$ , то каждая колодка прошла по поверхности барабана путь  $S_1 = Sr/R$ , и сила трения между каждой колодкой и барабаном совершила работу

$$A_1 = kNS_1 = kNS \frac{r}{R}.$$

Суммарная работа сил трения —

$$A = 8A_1 = 8kNS \frac{r}{R}$$

(на каждом из четырех колес по две колодки).

Таким образом, по закону сохранения энергии

$$8kNS \frac{r}{R} = mgS \sin \alpha.$$

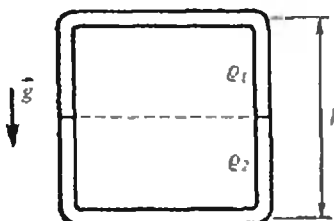
Отсюда находим  $N$ :

$$N = \frac{mgR \sin \alpha}{8kr} = 630 \text{ Н.}$$

В. И. Чивилев

Начав двигаться, жидкость будет стремиться занять положение, в котором потенциальная энергия системы  $\Pi$  будет наименьшей. Значение  $\Pi$  будет минимальным,

закрепленный в вертикальной плоскости. Трубка заполнена равными объемами двух не проникающих друг в друга жидкостей с плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  (см. рисунок). Вначале более плотная жидкость заполняла верхнюю часть трубки. В некоторый момент жидкости пришли в движение. Найти их максимальную скорость. Трения нет. Ускорение свободного падения равно  $g$ .



## Задача «Кванта»

когда более плотная жидкость окажется в нижней половине трубки, а менее плотная — в верхней (устойчивое положение равновесия). Согласно закону сохранения энергии именно в этот момент кинетическая энергия жидкости  $K = (m_1 + m_2)v^2/2$  (а значит и ее скорость) будет максимальной, и  $K = \Delta\Pi$  ( $\Delta\Pi$  — изменение потенциальной энергии системы). Найдем  $\Delta\Pi$ .

Центр тяжести жидкости, занимающей половину (верхнюю или нижнюю) трубки, находится на расстоянии  $y = l/8$  от ближайшей горизонтальной стороны. Смещение центра тяжести каждой жидкости при переходе в положение устойчивого равновесия равно

$$\Delta y = l - 2y = l - 2 \cdot \frac{l}{8} = \frac{3}{4} l.$$

Следовательно, изменение потенциальной энергии всей системы —

$$\Delta\Pi = (m_1 - m_2)g \cdot \frac{3}{4} l = \frac{3}{2} (\rho_1 - \rho_2) g S l^2$$

( $S$  — площадь сечения трубки).

Максимальное значение кинетической энергии —

$$K_{\max} = (m_1 + m_2) \frac{v_{\max}^2}{2} = (\rho_1 + \rho_2) S l v_{\max}^2.$$

Таким образом, из закона сохранения энергии —

$$(\rho_1 + \rho_2) S l v_{\max}^2 = \frac{3}{2} (\rho_1 - \rho_2) g S l^2$$

— находим  $v_{\max}$ :

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{3}{2} g l \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}}.$$

Г. В. Меледин

**Ф1095.** Рассеянный велосипедист не заметил, как случайно наехал на вертикальную стенку. Оценить, при какой минимальной скорости шина при ударе деформируется до металлического обода. Предполагается, что вы, хорошо представляя явление, можете сами задать необходимые для решения величины, выбрать достаточно правильно их числовые значения и получить числовой результат.

При ударе колеса велосипеда о вертикальную стенку происходит сжатие газа в камере. При этом совершается работа

$$A \sim p \cdot \Delta V,$$

где  $p$  — избыточное давление воздуха в камере,  $\Delta V$  — изменение объема камеры. На совершение этой работы пойдет кинетическая энергия велосипедиста, так что

$$p \cdot \Delta V \sim \frac{m u^2}{2}.$$

Отсюда для скорости велосипедиста получаем

$$u \sim \sqrt{\frac{2p \cdot \Delta V}{m}}.$$

Избыточное давление в камере можно оценить из соотношения

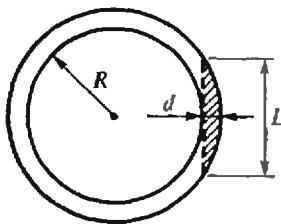
$$p \cdot 2S \sim mg,$$

где  $S$  — площадь соприкосновения каждого колеса с дорогой. Следовательно,

$$u \sim \sqrt{\frac{g \cdot \Delta V}{S}}.$$

Объем  $\Delta V$ , как видно из рисунка, можно оценить как





## Задача «Кванта»

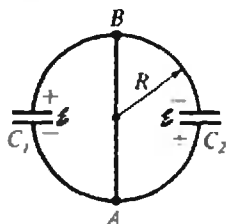
$$\Delta V \sim \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{L}{2}, \text{ где } \frac{L}{2} = \sqrt{2dR - d^2} \approx \sqrt{2dR}.$$

Сделаем численную оценку: при  $d \sim 4$  см,  $S \sim 3 \cdot 10$  см<sup>2</sup>,  $R \sim 40$  см получаем

$$u \sim 4 \text{ км/ч.}$$

Г. В. Федотович

**Ф1096.** Проволочное кольцо радиусом  $R$  имеет проводящую перемычку, расположенную вдоль диаметра. В левую и правую полуокружности включены конденсаторы  $C_1$  и  $C_2$  (см. рисунок). Кольцо помещено в нарастающее линейно со временем магнитное поле с индукцией  $B(t) = B_0 t / T$ , перпендикулярное его плоскости. В некоторый момент времени перемычку убирают и затем прекращают изменять поле. Найти заряды, установившиеся на конденсаторах.



Кольцо с проводящей перемычкой можно представить как два контура —  $AC_1B$  и  $BC_2A$  — площадью  $\pi R^2/2$  каждый. Магнитный поток, пронизывающий каждый контур, меняется со временем как

$$\Phi(t) = \frac{\pi R^2}{2} B_0 \frac{t}{T}.$$

При этом в каждом контуре поддерживается ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\pi R^2 B_0}{2T}. \quad (1)$$

Такова разность потенциалов между пластинами каждого конденсатора (см. рисунок). Следовательно, заряды на пластинах конденсаторов при изменении магнитного поля будут постоянны и равны, соответственно,

$$Q_1 = \mathcal{E} C_1, \quad Q_2 = -\mathcal{E} C_2.$$

После того как уберут перемычку и прекратят изменять поле, заряды  $Q_1$  и  $Q_2$  будут перераспределяться между  $C_1$  и  $C_2$  до тех пор, пока разность потенциалов между соединенными пластинами конденсаторов не станет равной нулю, т. е. пока напряжения на конденсаторах не сравняются. Установившиеся заряды на пластинах будут определяться условиями

$$\frac{Q'_1}{C_1} = \frac{Q'_2}{C_2}, \quad (2)$$

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2 \quad (3)$$

(последнее равенство следует из закона сохранения заряда). Решая совместно (2) и (3), используя выражение (1) для  $\mathcal{E}$ , находим  $Q'_1$  и  $Q'_2$ :

$$Q'_1 = \mathcal{E} C_1 \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\pi R^2 B_0 C_1}{2T} \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2},$$

$$Q'_2 = \mathcal{E} C_2 \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\pi R^2 B_0 C_2}{2T} \frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2}.$$

Г. В. Федотович

# "Квант" для младших школьников

## Задачи

1. Собрался Иван-царевич на бой со Змеем Горынычем, трехглавым и треххвостым. «Вот тебе меч-кладенец, — говорит ему баба-яга. — Одним ударом ты можешь срубить Змею либо одну голову, либо две головы, либо один хвост, либо два хвоста. Запомни: срубишь голову — новая вырастет, срубишь хвост — два новых вырастут, срубишь две головы — ничего не вырастет». За сколько ударов Иван-царевич может срубить Змею все головы и хвосты?

2. Вася сложил пятизначное число, все цифры которого были не меньше 5, с другим пятизначным числом, полученным из первого некоторой перестановкой цифр. В результате он получил число 146245. Правильно ли Вася сложил числа?

3. В квадратики головоломки, изображенной на рисунке, проставьте все цифры от 1 до 9 включительно так, чтобы выполнялись указанные равенства (читать равенства следует слева направо и сверху вниз).

4. Все поля шахматной доски покрыли 32-мя костяшками домино. При этом каждая костяшка покрыла в точности два поля. Некоторые из этих костяшек расположились горизонтально, некоторые — вертикально. Подсчитали количества вертикальных и горизонтальных костяшек — оба эти числа оказались четными. Верно ли, что при любом покрытии шахматной доски 32-мя костяшками домино получится четное число вертикально расположенных и четное число горизонтально расположенных костяшек?

5. Три окружности попарно касаются друг друга. Может ли площадь криволинейного треугольника, ограниченного меньшими дугами этих окружностей, быть больше площади одного из трех кругов, ограниченных данными окружностями?



$$\square - \square = \square \times \square = \square$$



Эти задачи нам предложили: В. Н. Русанов, С. Г. Губа, Л. П. Мочалов, В. В. Произволов, Г. А. Гальперин.

# АРХИМЕДОВА СИЛА В ЛИТЕРАТУРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

Кандидат педагогических наук  
С. А. ТИХОМИРОВА

Физика нас окружает повсюду — дома, на улице, в поле, в лесу, у реки. Писатели, удивительно метко подмечая все происходящее вокруг, дают яркие, красочные описания разнообразных природных явлений. Читая книгу, внимательно следя за сюжетом, мы иногда пропускаем эти описания, считая их не достаточно интересными. Между тем, они представляют весьма ценный и полезный материал не только для «лириков», но и для «физиков». Они учат нас быть внимательными, учат наблюдать, замечать, видеть проявления физики в окружающей жизни.

Мы предлагаем вам с такой физической точки зрения посмотреть на некоторые страницы литературных произведений. Начнем с отрывка из повести А. П. Чехова «Степь»:

«Егорушка... разбежался и полетел с полуторасаженной вышины. Описав в воздухе дугу, он упал в воду, глубоко погрузился, но дна не достал; какая — то сила, холодная и приятная на ощупь, подхватила и понесла его обратно наверх».

Ясно, что речь здесь идет о силе Архимеда, «холодной и приятной на ощупь». Давайте попытаемся дать объяснения различным проявлениям архимедовой силы, встречающимся на страницах художественной литературы. Прочитайте их и постарайтесь ответить на поставленные вопросы.

Отрывок из рассказа Б. В. Житкова «Под водой». Лейтенант, командовавший подводной лодкой, при входе в порт легкомысленно принял решение поднырнуть под пароход, стоявший по курсу лодки. «...Но в это время сразу же ход лодки замедлился. Все пошат-

нулись вперед. Лейтенант вздрогнул. Минер вопросительно на него взглянул.

— Сели на мель? Так ведь? — спросил он лейтенанта.

Рули были поставлены на подъем, винт работал, приборы показывали, что лодка на той же глубине. Лейтенант вспомнил, что тут в порту глинистое, липкое дно, понял, что лодка своим брюхом влипла в эту вязкую жижу...»

**Почему** лодка не могла всплыть? Всегда ли на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила?

К. Г. Паустовский, эпизод из повести «Кара-Бугаз». «...Наш кок отпросился искупаться, но залив его не принял. Он высоко выкидывал его ноги, и при всем тщании кок погрузиться в воду не смог. Это повеселило команду и улучшило несколько ее дурное расположение. Кок к вечеру покрылся язвами и утверждал, что вода залива являет собой разбавленную царскую водку, иначе — серную кислоту.»

**Почему** кок не смог искупаться в заливе Кара-Бугаз?

Л. Н. Толстой, строки из рассказа «Лед, пар и вода». «...В холодной воде легче плавать, чем в теплой. А в горячей воде и дерево тонет.»

**Почему** в горячей воде дерево может утонуть?

Теперь вычислим архимедову силу. Для постановки задачи воспользуемся отрывком из очерка В. А. Солоухина «Трава», где дается описание растения «виктория круциана».

«...На воде лежали яркие свежей сочной зеленой яркостью листья, размером с обыкновенный круглый обеденный стол... каждый лист был около

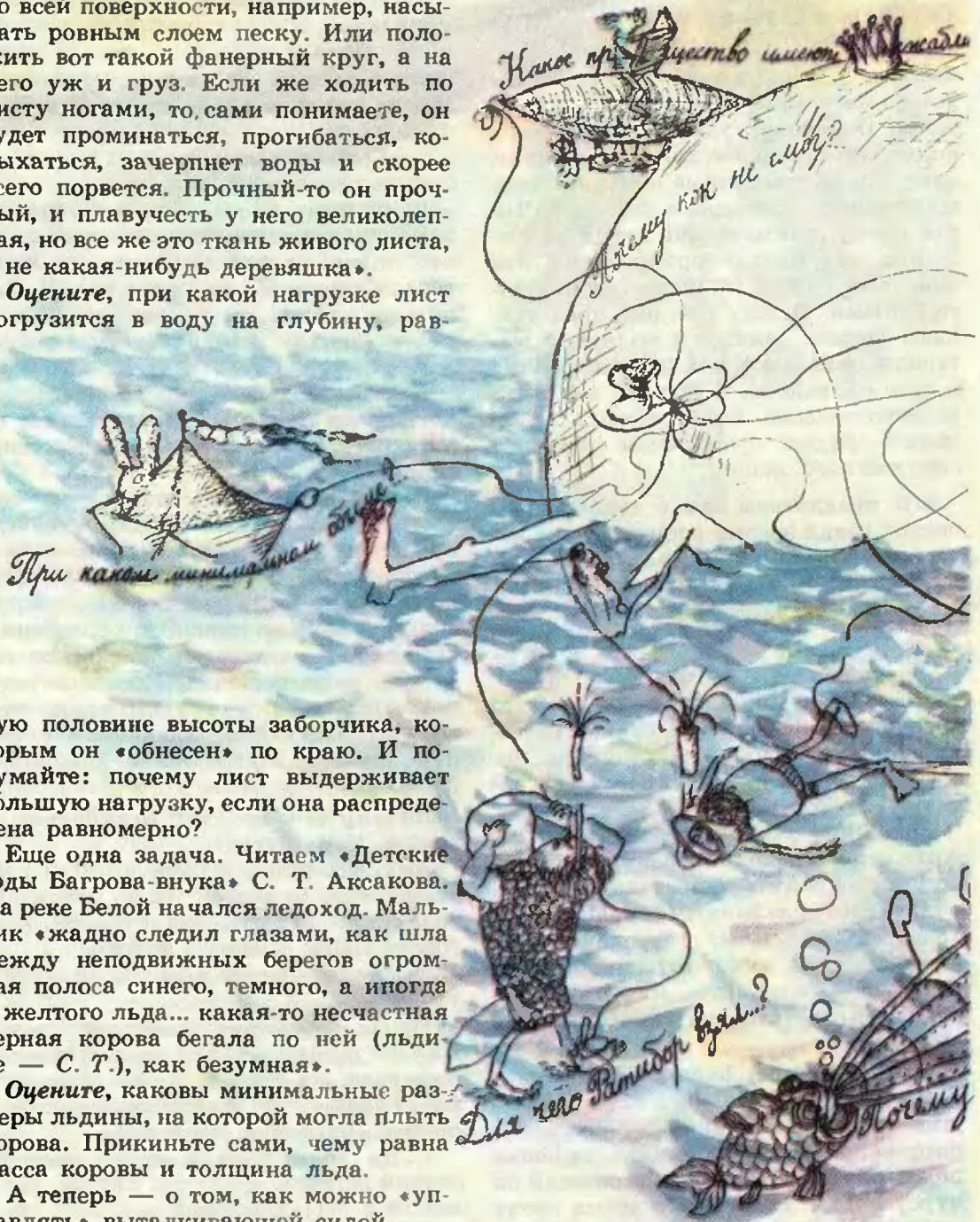


двух метров в диаметре. Каждый лист имел по краю строго перпендикулярный заборчик высотой сантиметров около семи...»

Сотрудница Ботанического сада поясняет: «...лист выдерживает семьдесят килограммов, даже больше... Но только если груз распределять ровно по всей поверхности, например, насыпать ровным слоем песка. Или положить вот такой фанерный круг, а на него уж и груз. Если же ходить по листу ногами, то, сами понимаете, он будет проминаться, прогибаться, колыхаться, зачерпнет воды и скорее всего порвется. Прочный-то он прочный, и плавучесть у него великолепная, но все же это ткань живого листа, а не какая-нибудь деревяшка».

Оцените, при какой нагрузке лист погрузится в воду на глубину, рав-

В отрывке из романа В. Д. Иванова «Русь изначальная» рассказывается, как воин-разведчик Ратибор собирается перейти на другой берег реки. Для этого он взял длинную толстую тростинку, «чтоб дышать под водой. Ноздри и уши пловец заткнул желтым



ную половине высоты заборчика, которым он «обнесен» по краю. И подумайте: почему лист выдерживает большую нагрузку, если она распределена равномерно?

Еще одна задача. Читаем «Детские годы Багрова-внука» С. Т. Аксакова. На реке Белой начался ледоход. Мальчик «жадно следил глазами, как шла между неподвижных берегов огромная полоса синего, темного, а иногда и желтого льда... какая-то несчастная черная корова бегала по ней (льдине — С. Т.), как безумная».

Оцените, каковы минимальные размеры льдины, на которой могла плыть корова. Прикиньте сами, чему равна масса коровы и толщина льда.

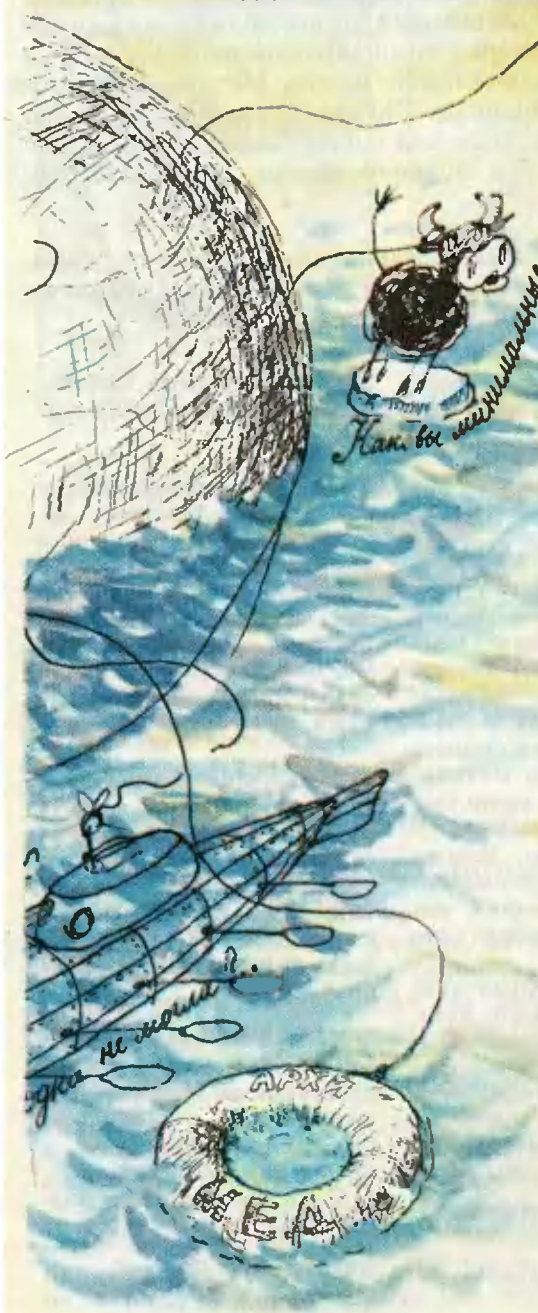
А теперь — о том, как можно «управлять» выталкивающей силой.



воском... Придерживая тростинку за конец губами, он скрылся под водой и обеими руками поднял камень величиной с коровью голову. Обвязав груз тонкой веревкой, Ратибор устроил петлю для руки».

Для чего Ратибор взял тяжелый камень в руки?

Природа предусмотрела различные приспособления, позволяющие животным жить в воде, плавать. А «сооб-



разительные» животные для облегчения плавания используют различные предметы. Читаем строки из художественных произведений.

Н. А. Некрасов, «Дедушка Мазай и зайцы»:

«Мимо бревно суковатое плыло,  
Сидя, и стоя, и лежа пластом,  
Зайцев с десяток спасалось на нем.

«Взял бы я вас — да потопите лодку!»  
Жаль их, однако, да жаль и находку —  
Я зацепился багром за сучок  
И за собою бревно поволок...»

Оцените, при каком минимальном объеме бревна зайцы могли на нем плыть. Прикиньте сами, чему равна масса зайца.

К. Г. Паустовский, «Мещерская сторона»:

«На берегах этих рек в глубоких норах живут водяные крысы. Есть крысы, совершенно седые от старости. Если тихо следить за норой, то можно увидеть, как крыса ловит рыбу... Чтобы легче было плавать, водяные крысы отгрызают длинный стебель куги и плавают, держа его в зубах... Он прекрасно держит на воде даже не такую тяжесть, как крыса».

Почему стебель куги обладает хорошей плавучестью?

Сила Архимеда действует на тела и в жидкостях, и в газах. Для пере-

мещения в воде люди используют подводные лодки, батискафы, различные суда. Освоение атмосферы началось с полетов на воздушных шарах.

Приведем отрывок из «Рассказа аэронавта» Л. Н. Толстого. «...Я посмотрел на барометр. Теперь я уже был на пять верст над землею и почувствовал, что мне воздуха мало, и я часто стал дышать. Я потянул за веревку, чтобы выпустить газ и спускаться, но ослабел ли я, или сломалось что-нибудь, — клапан не открывался... «Если я не остановлю шар, — подумал я, — то он лопнет, и я пропал»... Я изо всех сил ухватился за веревку и потянул. Слава богу, клапан открылся...»

**Почему воздушный шар, поднимающийся высоко, может лопнуть?**

В середине прошлого века был совершен первый полет на управляемом

аэростате — дирижабле. В начале нашего века дирижабли нашли широкое применение. Потом о них как-то забыли, а в наши дни вспомнили снова. Их предполагают использовать при освоении труднодоступных земель, как транспортное средство.

Наш экскурс по страницам художественной литературы закончим строками из романа А. Н. Толстого «Гиперболоид инженера Гарина»: «...огромный дирижабль висел над поляной, пришвартованный носом к причальной мачте. Мачта гнулась и трещала. Сигарообразное тело раскачивалось, и снизу казалось, что в воздухе повисло днище железной баржи...»

**Какое преимущество имеют дирижабли перед другими воздушными транспортными средствами?**

## Зачем нужна математика?

Сейчас на этот вопрос ответить несложно. Математика служит основой естественных и технических наук, без нее ныне не мыслима ни одна современная технология. Кроме того, математика активно внедряется в экономику, социологию и даже историю. А как представляли себе ответ на этот вопрос в «старое доброе время», ну, скажем, лет семьсот назад? Давайте полистаем научные трактаты тех времен. Пожалуй, самым знаменитым ученым тринадцатого века был Роджер Бэкон. Он родился в 1214 году близ Ильчестера, в графстве Сомерсет, и происходил из старинного дворянского рода. Бэкон обучался сначала в Оксфорде, потом в Париже, изучил все науки своего времени, а кроме того знал греческий, латинский, арабский и древнееврейский языки. Занимаясь экспериментальными наука-

ми, Бэкон заложил основы ряда отраслей нового естествознания. Его удивительные опыты привели к тому, что он был обвинен в сношениях с дьяволом. Дважды его сажали в тюрьму, причем в последний раз, в 1278 году, он был заключен на десять лет. Умер Бэкон в 1292 году. Главное сочинение Роджера Бэкона называется «Opus majus» («Главный труд»). Почти половина его посвящена математике. Некоторое представление об основных аргументах Роджера Бэкона можно составить по многословному, в обычаях тех времен, оглавлению его сочинения.

Часть I. О четырех причинах человеческого невежества: авторитете, обычае, общественном мнении и гордости мнимым знанием.

Часть II. Об источнике совершенной мудрости в Св. Писании.

Часть III. О пользе грамматики.

Часть IV. О пользе математики:

1) Необходимость математики в человеческих вещах.

2) Необходимость математики в божественных вещах: а) этим изучением занимались святые люди; б) география; в) хронология; г) циклы; д) золотое сечение; е) естественные явления, такие, как радуга; г) арифметика; ж) музыка.

3) Необходимость математики в церковных вещах: а) удостоверение веры; б) исправление календаря.

4) Необходимость математики в государстве: а) о климатах; б) гидрография; в) география; г) астронология.

Часть V. О перспективе:

1) Органы зрения.

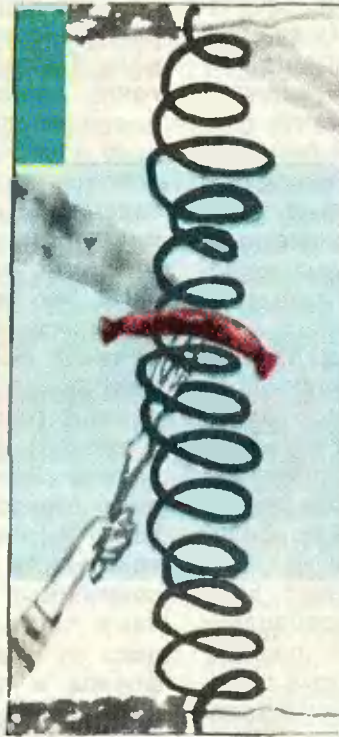
2) Зрение по прямым линиям.

3) Зрение, отраженное и преломленное.

4) О распространении впечатлений света, теплоты и пр.

Часть VI. Об экспериментальной науке.





## Школа в „Кванте“

### Физика 8, 9, 10:

Публикуемая ниже заметка «Закон сохранения энергии» предназначена восьмиклассникам, заметка «Правило Ленца» — десятиклассникам, «О швартовке, трении и формуле Эйлера» — десятиклассникам.

### Закон сохранения энергии

Законы сохранения в физике, да и в природе вообще, играют совершенно особую роль, являясь как бы всеобщим законодательством для всех природных явлений. Причем законодательством абсолютным: все, что согласуется с ним (т. е. с законами сохранения), может происходить, а может и нет, но зато уж что не согласуется — то совершенно запрещено.

Физику часто называют точной наукой. Это не совсем так. Физика точна лишь в том смысле, что она точно

знает, насколько именно приближены ее законы. Так, даже такой фундаментальный закон природы, как закон всемирного тяготения, имеет вполне определенные границы применимости. На очень малых расстояниях он не учитывает квантовости явлений, а на очень больших — того факта, что расстояние между двумя взаимодействующими массами нельзя преодолеть мгновенно.

Единственным исключением в этом смысле являются законы сохранения — они совершенно универсальны и на современном уровне знаний абсолютно точны. Например, закон сохранения энергии можно считать настолько надежно установленным экспериментальным фактом, что дальнейшая его проверка (опять же на сегодняшнем уровне знаний), по-видимому, просто лишена смысла.

Возникает естественный и чрезвычайно важный вопрос: в чем причина такой уникальности законов сохранения? Оказывается, все дело в том, что

законы сохранения являются следствием некоторых изначальных свойств окружающего нас мира, а именно — его симметрии. В частности, закон сохранения энергии связан с почти очевидным свойством времени (как эта связь ни выглядит неожиданной) — с его однородностью. Пояснить само свойство довольно просто, что же касается вывода из него закона сохранения энергии, то тут вам придется поверить на слово.

Кажется вполне очевидным, что любой эксперимент, иллюстрирующий какое-то физическое явление, будь он выполнен вчера, сегодня или через тысячу лет, должен дать одинаковый результат (если только он одинаково поставлен). Или, говоря иначе, физические законы со временем не меняются. Физики это формулируют так: время обладает свойством однородности. Именно из этого почти очевидного свойства («почти», потому что при более внимательном размышлении может возникнуть много вопросов, да и вообще мы довольно смутно представляем себе, что такое время) и вытекает тот факт, что в замкнутой системе полная энергия остается постоянной. А это и есть закон сохранения энергии.

До сих пор время от времени появляются сообщения о том, что где-то кто-то наблюдал отклонения от закона сохранения энергии. Разумеется, ни один физический закон не гарантирован от того, что в каком-то эксперименте мы можем выйти из области применимости этого закона. Но когда речь идет о законе сохранения энергии, надо совершенно четко понимать, что утверждение о нарушении этого закона эквивалентно утверждению о нарушении однородности времени. (Сюжет, явно упущенный фантастами, пишущими о так называемой машине времени. Ведь создание такой машины одновременно означает и отмену закона сохранения энергии. А уж тогда возможны любые чудеса, начиная с вечного двигателя и кончая бессмертием.)

По всей видимости, именно из-за глубокой связи энергии со временем

энергия играет совершенно уникальную, можно сказать, магическую роль. Помните Архимеда: «Дайте мне точку опоры...»? Так вот, энергия и является той точкой опоры, с помощью которой хотя бы в принципе, решаются практически все физические задачи. Однако из всех законов сохранения закон сохранения энергии является, пожалуй, наиболее сложным. Это связано, главным образом, с тем, что энергия существует в различных формах: механическая (кинетическая и потенциальная), внутренняя (которую иногда называют тепловой), электрическая и т. п. А со времен Эйнштейна, сформулировавшего принцип эквивалентности энергии и массы, стало ясно, что при превращениях энергии надо учитывать и возможные изменения массы. Вот почему часто довольно трудно проследить за переходом энергии из одной формы в другую и уже совсем невозможно записать закон сохранения энергии в общем виде. Тем не менее, для механической энергии макроскопической системы это сделать сравнительно легко. Только не в виде закона сохранения, а в виде закона изменения механической энергии.

Итак, рассмотрим какую-нибудь систему (это может быть одно тело или несколько взаимодействующих тел). В частном случае система может быть замкнутой, но это необязательно, т. е. в принципе на нее могут действовать внешние силы. При этом в системе вполне могут протекать какие-то внутренние процессы, приводящие к переходам механической энергии в какие-либо другие виды или наоборот. Но одно существенное предположение мы все же сделаем — будем считать, что извне тепло в систему не поступает.

Обозначим механическую энергию системы через  $W$ , а все остальные виды энергии, кроме механической, будем обозначать  $Q$ , по аналогии с тепловой, и обобщенно называть количеством теплоты. Из закона сохранения энергии очевидно, что изменение механической энергии системы равно произведенной работе ( $A$ ) за вычетом выделившегося количества теп-

лоты:  $W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = A - Q$ .

Строго говоря, величины  $A$  и  $Q$  могут быть как положительными, так и отрицательными:

$A > 0$ , если внешние тела совершают работу над системой, и  $A < 0$ , если система сама совершает работу над внешними телами;

$Q > 0$ , если механическая энергия переходит в какие-либо другие формы, и  $Q < 0$ , если переход происходит из немеханической формы энергии в механическую.

Приведенное уравнение оказывается исключительно эффективным при решении самых разнообразных физических задач.

*Е. Е. Городецкий*

## Правило Ленца

В физике часто встречается ситуация, когда внешнее воздействие на какой-либо объект приводит к появлению противодействия этому воздействию. Приведем конкретные примеры.

Заклучим газ в теплоизолированный цилиндр, закрытый легким поршнем, который может в нем свободно перемещаться. В равновесии поршень займет такое положение, при котором давление газа в цилиндре равно внешнему давлению. Смещая поршень, уменьшим объем газа в цилиндре. Давление газа при этом возрастет, и это будет служить препятствием для дальнейшего смещения поршня. При увеличении же объема газа давление в цилиндре упадет, и опять появятся силы, препятствующие перемещению поршня.

Поставим чайник с водой на огонь. В результате повышения температуры дна чайника в системе чайник — вода возникнут такие процессы теплопередачи, которые стремятся уменьшить эффект увеличения температуры — от чайника к воде будет передаваться тепло.

Внесем проводник в электростатическое поле. Под действием поля заряды проводника перераспределятся

таким образом, чтобы уничтожить причину, вызвавшую их перераспределение, т. е. поле внутри проводника.

Будем выдвигать постоянный магнит из проводящего кольца. В кольце появится индукционный ток, и оно станет притягиваться к магниту, стремясь уничтожить причину (удаление магнита от кольца), приведшую к возникновению тока.

Все эти примеры наводят на мысль, что внешнее воздействие, выводящее систему из состояния устойчивого равновесия, стимулирует в системе процессы, стремящиеся ослабить результат этого воздействия. Так формулируется принцип, установленный французским ученым Ле Шателье в 1884 году и уточненный немецким физиком Брауном в 1887 году. Этот принцип позволяет предвидеть, в каком направлении будут протекать процессы в системе, выведенной из равновесия. Он широко используется в физике и химии.

Исторически принцип Ле Шателье — Брауна был сформулирован как обобщение правила Ленца, которое гласит: индукционный ток, возникающий в результате электромагнитной индукции, всегда направлен так, чтобы попытаться препятствовать причине, его вызвавшей. Это правило сформулировал русский физик Ленц в 1833 году. Суть правила Ленца проиллюстрируем на нескольких примерах.

*Пример 1. Южный полюс постоянного магнита удаляется от проводящего кольца (рис. 1). Определите направление индукционного тока в кольце. Куда направлена сила, действующая на кольцо?*

Для ответа на первый вопрос удобно за причину, вызывающую ЭДС индукции в кольце, взять уменьшение магнитного потока через кольцо. Согласно правилу Ленца, собственное магнитное поле, созданное индукционным током, должно препятствовать этому уменьшению. Поэтому магнитные линии собственного поля идут через кольцо в том же направлении, что и магнитные линии поля постоянного магнита, т. е. влево. По правилу буравчика индукционный ток в коль-



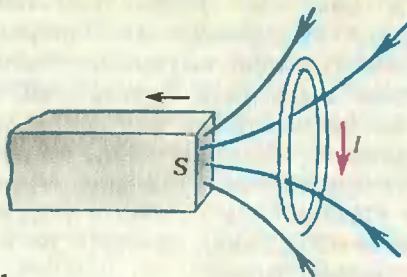


Рис. 1.

це направлен по часовой стрелке, если смотреть на кольцо справа.

Для ответа на второй вопрос причиной, вызывающей ЭДС индукции, удобно считать увеличение расстояния между магнитом и кольцом. Тогда, в соответствии с правилом Ленца, появится противодействие этой причине, т. е. между кольцом и магнитом возникнет сила притяжения, действующая на кольцо влево.

**Пример 2.** Южный полюс магнита удаляется от проводящего кольца с разрезом. Что можно сказать об индукционном токе в кольце и силе, действующей на кольцо, в этом случае?

Прежде чем ответить на эти вопросы, заметим, что в приведенной выше формулировке правила Ленца говорится о том, что индукционный ток всегда направлен так, чтобы попытаться препятствовать причине своего появления, и не говорится о том, что это препятствие (противодействие) обязательно проявится. Противодействие причине, вызывающей ЭДС индукции, проявляется и может быть обнаружено только в том случае, когда есть возможность для протекания индукционного тока. Эта возможность реализуется, например, если цепь, в которой возникает ЭДС индукции, замкнута. И чем меньше сопротивление этой цепи, тем больший ток пойдет по ней и тем сильнее проявится противодействие причине, его вызвавшей.

Ясно, что в кольце с разрезом ЭДС индукции тока создать не может и никакая сила на кольцо действовать не будет.

**Пример 3.** Рассмотрим опыт, эффектно демонстрирующий правило Ленца (рис. 2). Подвесим между полюсами электромагнита маятник,

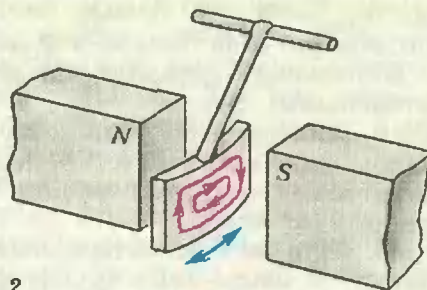


Рис. 2.

нижняя часть которого представляет толстую медную пластинку, и выведем его из положения равновесия. Что будет происходить с маятником дальше?

При движении такого маятника в медной пластинке появятся замкнутые индукционные токи (красные линии на рисунке 2), направление которых будет меняться. Согласно правилу Ленца, взаимодействие этих токов с внешним магнитным полем должно препятствовать причине, вызывающей токи, т. е. движению маятника. Таким образом, колебания маятника будут затухать, подобно колебаниям в очень вязкой жидкости.

Замкнутые индукционные токи, возникающие в сплошных проводящих телах, движущихся в магнитных полях или помещенных в изменяющиеся магнитные поля, называются вихревыми токами, или токами Фуко — по имени открывшего их французского ученого. В зависимости от условий вихревые токи могут быть как вредными, так и полезными.

Токи Фуко в сердечниках трансформаторов и вращающихся частях электрических генераторов и двигателей вызывают бесполезное нагревание и приводят к потерям энергии. Для ослабления вихревых токов такие детали изготавливают из тонких листов стали, разделенных тончайшими слоями диэлектрика так, чтобы изолирующие прослойки пересекали возможные линии протекания вихревых токов.

Примером полезного использования токов Фуко служит индукционная печь для плавки металла или быстрого приготовления пищи. Принцип действия индукционной печи состоит в том, что проводящее тело (металл

или пища) помещается внутрь катушки, по которой пропускается переменный ток высокой частоты. Возникающее внутри катушки переменное магнитное поле вызывает появление токов Фуко в проводящем теле и его разогрев.

В. И. Чивилёв



## О швартовке, трении и формуле Эйлера

Наверное, всем хорошо известно, что при швартовке судна с него бросают на пристань канат (шварто́в) с петлей на конце, которую надевают на причальную тумбу. Затем, когда судно подходит совсем близко к пристани, матрос быстро наматывает другой конец каната «восьмеркой» на специальную опору на палубе — кнехт (чугунная парная тумба). Таким способом удается надежно удерживать громадное судно рядом с причалом. В чем же здесь дело? В необычайной силе матроса?

По-видимому, многие, в том числе и прославленный писатель-фантаст Жюль Верн, склонны именно к такому заключению. Обратимся, вслед за Перельманом\*), к эпизоду из книги Жюль Верна «Матиас Шандор», где описывается подвиг силача-атлета Матифу. Этот герой при спуске на воду судна «Трабоколо» предотвратил его столкновение с маленькой прогулочной яхтой, что грозило яхте гибелью.

«...«Трабоколо» быстро скользило вниз по наклону. Белый дымок, появившийся вследствие трения, закрутился перед его носом, тогда как корма погрузилась уже в воду бухты (судно спускалось на воду кормой вперед — А. Б.).

Вдруг появляется человек, схватывает швартов, висящий у передней части «Трабоколо», и старается удержать его, пригнувшись к земле. В одно

мгновение он наматывает швартов на вбитую в землю металлическую трубу и, рискуя быть раздавленным, держит с нечеловеческой силой в руках канат в продолжение 10 секунд.»

Жюль Верн правильно отметил роль, которую играет трение во время скольжения корабля, — нагрев его корпуса и возникновение из-за этого дыма. Однако он недооценил роль трения (и переоценил, тем самым, роль Матифу) при описании подвига атлета.

Давайте попробуем разобраться, какая сила нужна, чтобы удержать канат, уже намотанный на опору — трубу или кнехт.

Вначале трением пренебрежем и рассмотрим неподвижный участок каната, изогнутый опорой на малый угол  $\Delta\alpha$  (см. рисунок). Пусть канат натянут силой  $T$  и со стороны опоры на рассматриваемый участок каната действует сила реакции  $N$ . Найдем ее из условия равновесия каната: сумма всех сил, действующих на участок каната, равна нулю. Отсюда

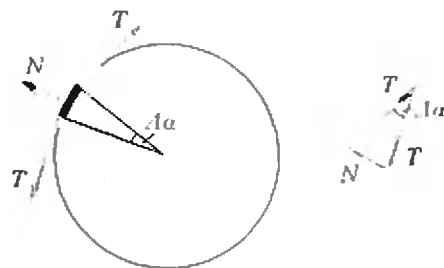
$$N = T\Delta\alpha$$

(здесь мы учли, что для малых углов  $\sin \Delta\alpha = \Delta\alpha$ ).

При наличии трения канат может быть неподвижным и в том случае, когда силы натяжения слева и справа от рассматриваемого участка немного отличаются друг от друга. Проскальзывание каната начнется тогда, когда разность этих сил достигнет максимальной величины силы трения покоя:

$$\Delta T = F_{\text{тр}} = \mu N = \mu T\Delta\alpha,$$

где  $\mu$  — коэффициент трения между канатом и опорой. Из последнего равенства следует, что скорость измене-



\*) Я. И. Перельман. «Занимательная физика». — М.: Наука, 1986. Книга 2, с. 35.

ния силы натяжения каната с ростом угла охвата пропорциональна величине силы натяжения:

$$\Delta T / \Delta \alpha \sim T, \text{ или } \Delta T / \Delta \alpha = -\mu T.$$

Знак минус здесь означает, что при увеличении угла охвата натяжение каната уменьшается.

В физике часто встречаются ситуации, когда скорость изменения какой-либо величины пропорциональна самой этой величине. Напомним, например, явление естественного радиоактивного распада («Физика 10», § 92): уменьшение числа нераспавшихся радиоактивных ядер в единицу времени пропорционально их же числу. Другим примером может служить разряд заряженного конденсатора через резистор: уменьшение заряда на конденсаторе пропорционально току через резистор, который, в свою очередь, пропорционален заряду конденсатора. Во всех этих случаях происходит очень быстрое изменение соответствующей величины. Действительно, если, например, скорость изменения скорости (ускорение) движения тела постоянна, то величина скорости линейно растёт со временем. Если же ускорение пропорционально скорости, то оно все время увеличивается и скорость растёт намного быстрее — по так называемому экспоненциальному закону.

Такая же зависимость получается и в нашем случае для изменения силы натяжения каната. (Подчеркнем еще раз, что речь идет о минимально возможной разности сил натяжения каната — когда вот-вот начнется его скольжение по опоре.) Впервые этот вопрос был рассмотрен великим математиком, механиком, физиком и астрономом Леонардом Эйлером (1707—1783). Он показал, что натяжение каната  $T$  в зависимости от угла охвата опоры канатом (угол навития)  $\alpha$  изменяется по закону

$$T = T_0 e^{-\mu \alpha},$$

где  $e = 2,72\dots$  — основание натурального логарифма,  $T_0$  — начальное натяжение каната (еще не навитого на опору).

Угол  $\alpha$  (измеряемый в радианах) связан с числом оборотов  $n$  каната

вокруг кнехта простым соотношением:  $\alpha = 2\pi n$ . Тогда, если при одном обороте натяжение каната уменьшается в  $k$  раз, т. е.

$$\frac{T_0}{T_1} = e^{2\pi\mu} = k,$$

после  $n$  оборотов натяжение ослабевает в  $k^n$  раз:

$$\frac{T_0}{T_n} = \frac{T_0}{T_1} \frac{T_1}{T_2} \dots \frac{T_{n-1}}{T_n} = k^n = e^{2\pi\mu n}.$$

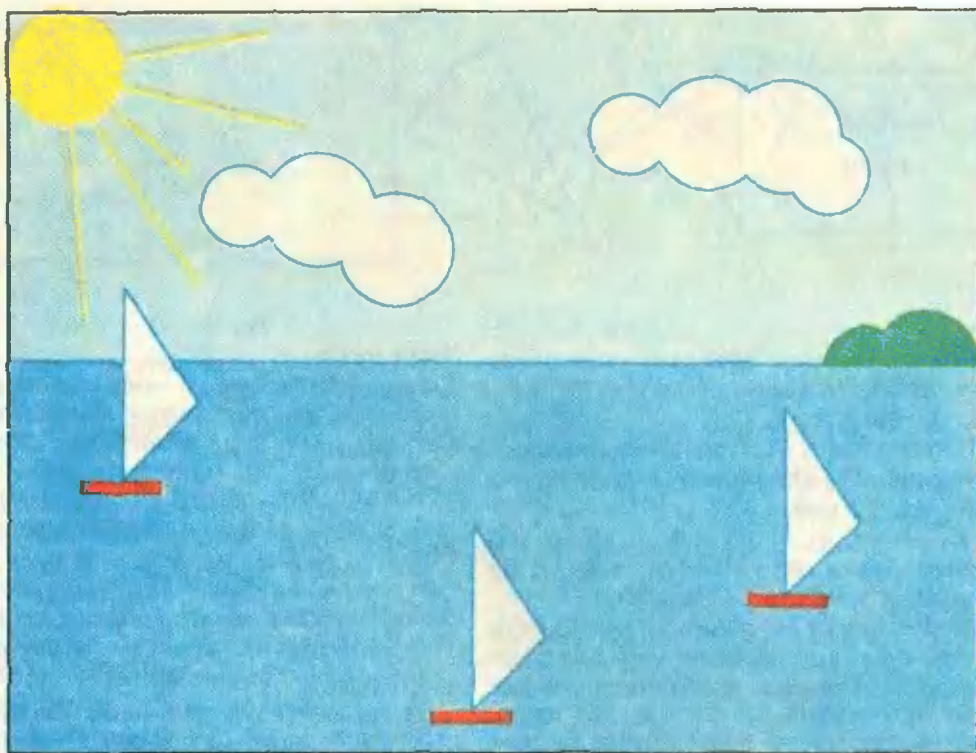
При коэффициенте трения  $\mu = 0,3$ , например, один оборот каната вокруг кнехта уменьшает силу его натяжения почти в 7 раз, а если сделать два оборота — натяжение ослабевает примерно в 40 раз! С ростом числа оборотов натяжение каната (благодаря трению) становится все меньше и меньше и постепенно сходит на нет.

Возвращаясь к герою Жюль Верна Матифу, мы теперь можем сказать, что, намотав канат на железную трубу, он сильно облегчил себе задачу. Я. И. Перельман, используя содержащиеся в романе данные о «Трабоколо» и сделав соответствующие расчеты, обнаружил, что если силач Матифу успел обернуть канат вокруг трубы три раза, то на его месте мог бы быть и ребенок. Точно так же и при швартовке судов от матросов не требуется большой силы — нужно лишь проявить внимательность и ловкость и вовремя успеть быстро намотать канат на кнехт.

Заметим, что с рассмотренным явлением каждый из вас сталкивается практически ежедневно, что-нибудь завязывая — будь то шнурки, шарф или веревка. Ведь любой узел по существу представляет собой веревку, навитую на «опору» (ту же самую веревку).

А. И. Бuzдин





## Искусство программирования

### Рисует школьная ЭВМ

А. Г. ЩЕГОЛЕВ

Со школьной ЭВМ, снабженной дисплеем, можно общаться в диалоговом режиме по заранее предусмотренному сценарию (см., например, статьи В. А. Каймина в «Кванте», 1986, № 10, 11). При этом ЭВМ и ее пользователь обмениваются фрагментами текстов и числовыми данными. Между тем, большинство школьных микро-ЭВМ позволяют не только «печатать», но и «рисовать» на экране, т. е. обладают *графическими* возможностями.

Для того чтобы на экране появилось изображение, мы должны указать исполнителю (школьной ЭВМ), где и что необходимо нарисовать. По-

этому прежде всего необходимо договориться о системе координат.

Принятая в микроЭВМ координатная система отличается от известной вам по школьному курсу математики. Начало координат (точка  $O$ ) помещается в левом верхнем углу, а оси абсцисс и ординат направлены так, как показано на рисунке 1. Поле экрана представляет собой множество точек, каждая из которых может иметь определенный цвет, а координаты любой точки — целые числа  $x, y$  в пределах (для экрана ЭВМ «Ямаха»)  $0 \leq x \leq 255, 0 \leq y \leq 191$ .

Так же, как дом складывают из кирпичей, любое сложное изображение мы будем «строить» из простейших элементов. Для этого дополним знакомый вам школьный алгоритмический язык следующими графическими командами:

- 1) точка  $(x, y)$ ,  $цв$  — изобразить точку цвета  $цв$  с координатами  $(x, y)$ ;
- 2) отрезок от  $(x_1, y_1)$  до  $(x_2, y_2)$ ,



Рис. 1.

*цв* — начертить отрезок, соединяющий точки с координатами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  цвета *цв*;

3) *окружн*( $x, y$ ),  $r$ , *цв* — нарисовать окружность радиусом  $r$  с центром в точке  $(x, y)$  цвета *цв*;

4) *дуга*( $x, y$ ),  $r$ , от  $\alpha$  до  $\beta$ , *цв* — нарисовать дугу окружности  $(x, y)$ ,  $r$ , *цв* от угла  $\alpha$  до угла  $\beta$  (рис. 2);

5) *закрасить*( $x, y$ ), *цв* — закрасить цветом *цв* точку  $(x, y)$  вместе с окрестностью в пределах заключающей эту точку замкнутой линии того же цвета (в качестве части этой линии может использоваться граница экрана); если же такого контура нет, закрасится весь экран.

Оказывается, перечисленных команд вполне достаточно, чтобы изображать довольно замысловатые фигуры. Например, изображение скрипичного ключа можно представить как совокупность отрезков и дуг разного радиуса, плавно переходящих друг в друга (рис. 3).

Для облегчения построения часто повторяющихся элементов введем еще две команды:

6) *рамка* от  $(x_1, y_1)$  до  $(x_2, y_2)$ , *цв* — изобразить прямоугольную рамку со сторонами, параллельными сторонам экрана, цветом *цв*; прямоугольник задается координатами двух диагональных вершин  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  (рис. 4);

7) *рамка-закраш* от  $(x_1, y_1)$  до  $(x_2, y_2)$ , *цв* — закрасить рамку 6) и ее внутреннюю область цветом *цв*.

Алгоритмы, написанные с использованием графических команд, могут быть переведены на любой язык программирования, имеющий соответствующие средства. Вот как выглядит запись операторов 1) — 7) на языке

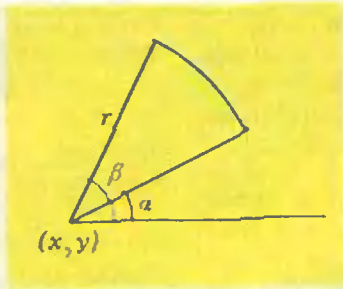


Рис. 2.

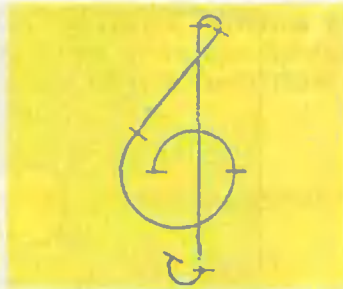


Рис. 3.

MSX-BASIC, принятом на ЭВМ «Ямаха».

- |                                     |                                 |
|-------------------------------------|---------------------------------|
| 1) N PSET(X, Y), C                  | (точка)                         |
| 2) N LINE(X1, Y1) — (X2, Y2), C     | (отрезок)                       |
| 3) N CIRCLE(X, Y), R, C             | (окружность)                    |
| 4) N CIRCLE(X, Y), R, C, A, B       | (дуга; углы A и B — в радианах) |
| 5) N PAINT(X, Y), C                 | (закраска)                      |
| 6) N LINE(X1, Y1) — (X2, Y2), C, B  | (рамка)                         |
| 7) N LINE(X1, Y1) — (X2, Y2), C, BF | (закрашенная рамка).            |

Синим здесь выделены изменяющиеся элементы, в качестве которых могут использоваться числа (константы), а также имена переменных. N — номер (нумерация операторов в Бейсике обязательна), C — целое число от 1 до 15, обозначающее цвет, которым нужно закрасить данный объект:

- |                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| 1 — черный,         | 6 — темно-красный,  |
| 2 — средне-зеленый, | 7 — голубой,        |
| 3 — светло-серый    | 8 — средне-красный, |
| 4 — темно-голубой,  | 9 — светло-красный, |
| 5 — светло-голубой, | 10 — темно-желтый,  |
| 11 — светло-желтый, |                     |
| 12 — темно-зеленый, |                     |
| 13 — розовый,       |                     |
| 14 — серый,         |                     |
| 15 — белый.         |                     |

Например, оператор Бейсика 20 PSET(50, 100), 6 приведет к появлению на экране темно-красной точки с координатами  $x=50$ ,  $y=100$ .

Кроме того, перевод ЭВМ в графический режим будет осуществляться по команде графика, что на Бейсике будет записано как SCREEN 2.

Займемся теперь изображением картин, помещенной в начале статьи. *Сценарий* в этом случае — это рисунок, выполненный на бумаге. Вообще же графический сценарий представляет собой последовательность рисунков (сцен) и описание логики их чере-



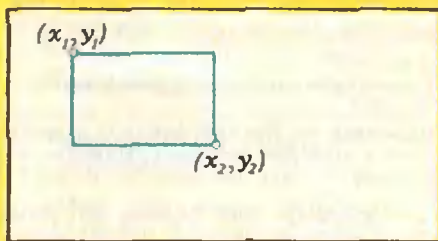


Рис. 4.

дования. Мы же ограничимся пока изображением единственной и неподвижной картинке «сцены» (нечто вроде «немой сцены» в «Ревизоре» Н. В. Гоголя).

Заметим, что критерием правильности графической программы служит соответствие полученного на экране рисунка сценарию. Любое расхождение (даже если рисунок получился более интересным) — ошибка! Поэтому не жалейте времени на составление сценария, прежде чем приступить к алгоритму.

Итак, приведем алгоритм для рисования цветной картинке со с. 51 (алгоритм и программа составлены ученицей Остащевской с. ш. Л. Чаусовой в летней компьютерной школе МИЭМ).

алг синее море

нач

графика

небо

солнце

облако1

облако2

море

яхта1

яхта2

яхта3

деревья

кон

алг облако1

нач

окруж (60, 50), 10, 15

закрасить (61, 51), 15

окружн (80, 50), 15, 15

закрасить (81, 51), 15

окружн (100, 60), 13, 15

закрасить (101, 61), 15

кон

алг море

нач

рамка-закраш от (0,90) до (250, 190), 4

кон

алг яхта1

нач

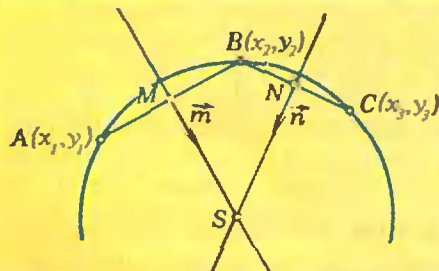


Рис. 5.

отрезок от (30, 120) до (30, 70), 15

отрезок от (30, 120) до (50, 100), 15

отрезок от (50, 100) до (30, 70), 15

закрасить (40, 100), 15

отрезок от (20, 120) до (40, 120), 6

кон

алг яхта3

нач

отрезок от (200, 150) до (200, 100), 15

отрезок от (200, 150) до (220, 130), 15

отрезок от (220, 130) до (200, 100), 15

закрасить (210, 120), 15

отрезок от (190, 150) до (210, 150), 6

кон

алг небо

нач

рамка-закраш от (0, 0) до (250, 90), 5

кон

алг солнце

нач

окружн (15, 15), 15, 10

закрасить (16, 16), 10

отрезок от (15, 15) до (40, 0), 10

отрезок от (15, 15) до (100, 20), 10

отрезок от (15, 15) до (50, 40), 10

отрезок от (15, 15) до (0, 30), 10

отрезок от (15, 15) до (20, 70), 10

кон

алг облако2

нач

окружн (150, 30), 10, 15

закрасить (151, 31), 15

окружн (170, 30), 15, 15

закрасить (171, 31), 15

окружн (190, 30), 15

закрасить (191, 31), 15

окружн (200, 40), 15

закрасить (201, 41), 15

кон

алг яхта2

нач

отрезок от (120, 180) до (120, 120), 15

отрезок от (120, 180) до (140, 160), 15

отрезок от (140, 160) до (120, 120), 15

закрасить (130, 160), 15

отрезок от (110, 180) до (130, 180), 6

кон

алг деревья



нач  
 окружн (220, 90), 10, 2  
 закрасить (221, 91), 2  
 окружн (235, 90), 2  
 закрасить (236, 91), 2  
 рамка закраш от (210, 90) до (250, 110), 2  
кон

Обратите внимание, что основной алгоритм «синее море» представляет собой план изображения. За рисование же отдельных объектов «отвечает» соответствующий вспомогательный алгоритм. На языке Бейсик обращение к вспомогательному алгоритму (подпрограмме) осуществляет оператор

`N GOSUB` номер-начала,

где номер-начала — номер оператора, с которого начинается подпрограмма. В качестве же оператора конца вспомогательного алгоритма (кон) используется оператор Бейсика `N RETURN`

*Варианты  
 вступительных  
 экзаменов*

Московский авиационный  
 технологический  
 институт  
 им. К. Э. Циолковского

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$3^{x^2+x+2} = 27.$$

2. Решите неравенство

$$|x^2 - 2x - 7| \leq 1.$$

3. Решите уравнение

$$\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{1}{2}.$$

4. На графике функции  $y = x^2 - 4x + 2$  найдите точки, касательные в которых проходят через точку  $K(4, 1)$ .

5. Медианы, проведенные из вершин острых углов прямоугольного треугольника, равны 3 и 2. Найдите площадь треугольника.

(в основной программе для этого используется оператор `N END`).

Задачи

1. Переведите алгоритм «синее море» на язык `MSX BASIC`

2. Выберите несложный рисунок и постройте алгоритм и программу, изображающие его на экране ЭВМ

Вы заметили, что самой непродуманной (и самой скучной) работой при построении графических алгоритмов является подбор координат для задания местоположения простейших элементов. Для создания изображений обычно используют специальную программу — *графический редактор* — которая позволяет рисовать на экране, управляя «графическим карандашом» с помощью клавиатуры. Графический редактор «переводит» изображение в операторы Бейсика, и полученный текст программы используется для воспроизведения этого изображения.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$x^2 + 2x + 5 \leq x + 8.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

3. Решите уравнение

$$2 \sin 11x + \cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x = 0.$$

4. Определите промежутки монотонности функции

$$y = \frac{(x-2)(x-4)}{x+1}.$$

5. Высота прямоугольного треугольника делит его на треугольники с периметрами  $p_1$  и  $p_2$ . Найдите периметр исходного треугольника.

Вариант 3

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 5y = 14, \\ 3x - 2y = 2. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$x^{2 \lg^2 x - 1} \lg x = \sqrt{10}.$$

3. Третий член арифметической прогрессии в три раза больше второ-

го, а сумма всех членов прогрессии в 40 раз больше третьего члена. Найдите число членов прогрессии.

4. Решите уравнение  $f'(x)=g(x)$ , где  $f(x)=\cos 2x$ ,  $g(x)=\sin^2 2x-3$ .

5. Высота и медиана, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол при этой вершине на три равные части. Найдите углы треугольника.

### Физика

#### Задачи устного экзамена

1. При свободном падении тела массой  $m=0,2$  кг с высоты  $h=36$  м время падения оказалось равным  $t=3$  с. Вычислите по этим данным силу сопротивления воздуха, считая ее постоянной.

2. Из одной и той же точки вертикально вверх с интервалом  $\tau=2$  с выбрасывают два одинаковых шарика со скоростью  $v_0=30$  м/с каждый. Через некоторое время шарики сталкиваются (соударение упругое). Сколько времени каждый шарик будет находиться в полете?

3. Шарик ударяется о плоскость под углом  $\alpha=45^\circ$  к ее нормали. Коэффициент трения о плоскость  $\mu=0,6$ . Определите, под каким углом он отразится. Считать, что нормальная составляющая скорости при ударе сохраняется.

4. Уравнение гармонических колебаний имеет вид  $x=x_m \sin \omega t$ . Известно, что при фазе  $\varphi_1=\pi/6$  смещение  $x_1=2$  см. Определите амплитуду колебаний и смещение при фазе  $\varphi_2=3\pi/4$ .

5. В какую сумму обойдется приготовление  $m=1$  кг льда в домашнем холодильнике, если считать, что он работает по идеальному циклу? Комнатная температура  $t_1=23^\circ\text{C}$ , температура фреона  $t_2=-10^\circ\text{C}$ , 1 кВт·ч электроэнергии стоит 4 коп. Удельная теплоемкость воды  $c=4200$  Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда  $\lambda=3,36 \cdot 10^5$  Дж/кг.

6. Скорость самолета при посадке  $v=360$  км/ч. Определите разность потенциалов, возникающую между концами крыльев самолета, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна  $B=50$  мкТл, а размах крыльев самолета  $l=20$  м.

7. Неоновая лампа горит, когда напряжение на ее электродах не менее определенного значения  $U^*$ . Определите время, в течение которого горит лампа в каждый полупериод, если она включена в сеть, действующее значение напряжения в которой равно  $U^*$ . Напряжение меняется с частотой  $\nu=50$  Гц.

8. Отражающая поверхность зеркала составляет с плоскостью стола угол  $\alpha=135^\circ$ . По направлению к зеркалу по столу катится шар со скоростью  $v=3$  м/с. В каком направлении и с какой скоростью движется изображение шара?

9. На дне бассейна, заполненного водой, лежит плоское зеркало. Человек смотрит вертикально вниз с бортика бассейна и видит отражение своего лица. На каком расстоянии от поверхности воды оно находится? Глубина бассейна  $H=2$  м, расстояние от лица человека до поверхности  $h=2$  м, показатель преломления воды  $n=4/3$ .

10. При распаде л-мезона на два фотона зарегистрированы фотоны, летящие под углами  $\alpha=30^\circ$  и  $\beta=60^\circ$  к направлению движения мезона. Определите скорость распавшегося мезона. Скорость света  $c=3 \cdot 10^8$  м/с.

Публикацию подготовили М. Р. Ведерников, М. Р. Либерзон, А. А. Симонов

## Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

### Математика

#### Письменный экзамен

#### В а р и а н т 1

1. Из пункта А кольцевой трассы длиной 24 км выехал велосипедист, а через 20 минут в том же направлении выехал мотоциклист. Через 10 минут после выхода он нагнал велосипедиста, а еще через 30 минут нагнал его вторично. Определите скорости велосипедиста и мотоциклиста.

2. Решите уравнение

$$2\cos x + \sin x = 1 + \sin 2x.$$

3. Решите уравнение

$$81^x - 16^x = \frac{5}{6} \cdot 36^x.$$

4. Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$(p-1) \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x + (p+2) = 0$$

имеет хотя бы одно решение.

5. Правильная треугольная пирамида со стороной основания  $a$  вписана в сферу, при этом центр сферы делит высоту пирамиды в отношении  $\sqrt{5}:1$ , считая от вершины. Верхнее основание правильной четырехугольной призмы лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины ее нижнего основания принадлежат сфере. Какой должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите это значение объема.

Вариант 2

1. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, в которой сумма первых четырех членов равна 40, а сумма членов начиная с четвертого и до седьмого включительно равна 1080.

2. Решите уравнение

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{1 - \log_3(x^2 + 3)}{1 - \log_3(x + 3)} = 2.$$

4. Решите неравенство

$$2 \cdot 4^{\sqrt{x}} - 5 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 2 < 0.$$

5. Высота  $H$  правильной четырехугольной пирамиды равна стороне основания. Нижнее основание правильной четырехугольной призмы принадлежит основанию пирамиды,

а вершины верхнего основания лежат на медианах боковых граней пирамиды, проведенных из вершин основания к боковым ребрам пирамиды. Какой должна быть высота призмы, чтобы длина ее диагонали была наименьшей? Найдите это значение длины диагонали.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Мяч, брошенный со скоростью  $v_0 = 10$  м/с под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту, ударяется о вертикальную стенку, находящуюся на расстоянии  $s = 3$  м от места бросания. Определите модуль и направление скорости мяча после удара. Удар считать абсолютно упругим, а углы падения и отражения — равными.

2. Тело массой  $m = 1$  кг брошено под углом к горизонту. За время полета его импульс изменился на  $\Delta P = 10$  кг·м/с. Определите наибольшую высоту подъема тела.

3. По длинному стержню массой  $M$ , подвешенному на пружине с коэффициентом жесткости  $k$ , скользит вниз шайба массой  $m$  с ускорением  $a$  (рис. 1). Определите энергию деформации пружины. Массой пружины пренебречь.

4. Некоторое количество водорода находится в закрытом сосуде при температуре  $T_1$  и давлении  $p_1 = 400$  Па. Газ нагрели до температуры  $T_2$ , при которой молекулы водорода практически полностью распались на атомы. При этом давление газа стало  $p_2 = 40$  кПа. Определите, во сколько раз возросла средняя квадратичная скорость частиц газа.

5. Электрическое поле образовано внешним однородным электростатиче-

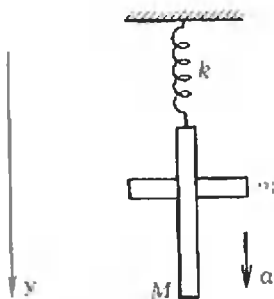


Рис. 1.

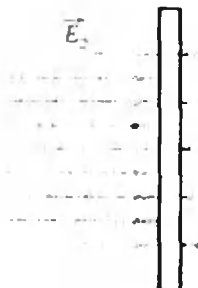


Рис. 2.

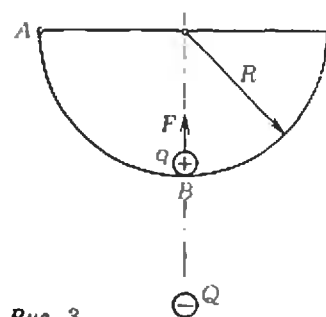


Рис. 3.



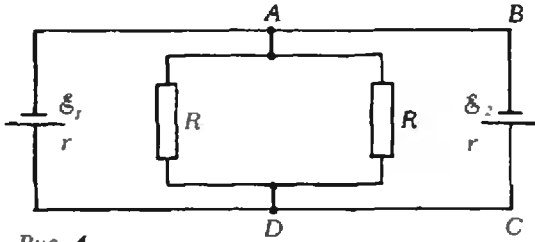


Рис. 4.

ским полем и полем заряженной металлической пластины, которое вблизи пластины тоже можно считать однородным. Напряженность результирующего электрического поля справа от пластины  $E_1 = 3 \cdot 10^4$  В/м, а слева  $E_2 = 5 \cdot 10^4$  В/м (рис. 2). Определите заряд пластины, если сила, действующая на пластину со стороны внешнего электрического поля,  $F = 0,7$  Н.

6. Шарик массой  $m = 2$  г, имеющий положительный заряд  $q$ , начинает скользить без начальной скорости из точки  $A$  по сферической поверхности радиусом  $R = 10$  см (рис. 3). Потенциальная энергия взаимодействия заряда  $q$  и неподвижного отрицательного заряда  $Q$  в начальный момент  $W_A = -2 \cdot 10^{-3}$  Дж. Определите потенциальную энергию взаимодействия зарядов, когда заряд  $q$  находится в точке  $B$ , если в этом случае результирующая сил реакции со стороны сферической поверхности и кулоновского взаимодействия, приложенная к шарикю,  $F = 0,1$  Н. Трением между шариком и сферической поверхностью пренебречь.

7. Источники тока, имеющие одинаковые внутренние сопротивления  $r = 0,5$  Ом, подключены к резисторам, каждый из которых имеет сопротивление  $R$  (рис. 4). ЭДС источников тока равны  $\mathcal{E}_1 = 12$  В и  $\mathcal{E}_2 = 6$  В. Определите величину сопротивления  $R$ , при которой ток в цепи  $ABCD$  не течет.

8. Радиус орбиты электрона в модели атома Бора  $r = 5,3$  нм. Какую работу надо совершить, чтобы ионизировать этот атом?

9. При взаимодействии ядер алюминия  ${}_{13}^{27}\text{Al}$  с  $X$ -частицами образуются ядра изотопа магния  ${}_{12}^{24}\text{Mg}$  и  $Y$ -частицы. При взаимодействии же  ${}_{13}^{27}\text{Al}$

частиц с ядрами алюминия  ${}_{13}^{27}\text{Al}$  образуются ядра изотопа магния  ${}_{12}^{24}\text{Mg}$  и  $Z$ -частицы. Какие широко известные частицы  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  участвуют в этих ядерных реакциях?

10. При термоядерной реакции слияния дейтерия  ${}^2_1\text{H}$  и трития  ${}^3_1\text{H}$  образуется нейтрон и неизвестная частица, при этом выделяется энергия  $E_0 = 17,6$  МэВ. Определите неизвестную частицу и полную энергию, которая выделится, если прореагирует  $m = 1$  г дейтерия.

Публикацию подготовили Л. П. Паршев,  
Ю. А. Струков

## Московский станкоинструментальный институт

### М а т е м а т и к а

#### Письменный экзамен

#### В а р и а н т 1

##### 1. Решите уравнение

$$1 + \lg(1 + 2x + x^2) - \lg(x^2 + 6) = 2 \lg(x + 1).$$

2. Решите уравнение  $x^2 + px + 21 = 0$ , зная, что сумма квадратов его корней равна 58.

3. Поезд должен был пройти 840 км за определенное время. На половине пути поезд был задержан у семафора на  $\frac{1}{2}$  часа и для того, чтобы прибыть к месту назначения в срок, увеличил скорость на 2 км/ч. Сколько времени поезд находился в пути?

##### 4. Решите уравнение

$$\sin 3x - \sin x \cos 2x = 0.$$

5. В основании прямой призмы лежит треугольник. Два его угла соответственно равны  $\alpha$  и  $\beta$ , а площадь равна  $S$ . Прямая, соединяющая вершину верхнего основания с центром круга, описанного около нижнего основания, составляет с плоскостью основания угол, равный  $\varphi$ . Найдите объем призмы.

#### В а р и а н т 2

##### 1. Решите уравнение

$$5^{1+\log_5 x} + 5^{-\log_5 x - 1} = \frac{26}{5}$$

2. Найдите целые значения  $k$ , при которых уравнение

$$(k - 12)x^2 + 2(k - 12)x + 2 = 0$$

не имеет корней.

3. Катер отошел от причала одновременно с плотом и прошел вниз по реке  $40/3$  км. Не делая остановки, он развернулся и пошел вверх по реке. Пройдя  $28/3$  км, он встретился с плотом. Какова собственная скорость катера, если скорость течения реки  $4$  км/ч?

4. Решите уравнение

$$\cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 0,25.$$

5. Определите ребро куба, вписанного в конус, образующая которого равна  $l$  и наклонена к плоскости основания под углом  $\alpha$ .

## Физика

### Задачи устного экзамена

1. На горизонтальной поверхности покоится тело, к которому приложена сила  $\vec{F}$  (рис. 1). При каких значениях угла  $\alpha$  тело будет оставаться в покое независимо от величины силы? Коэффициент трения  $\mu = 0,15$ .

2. Спутник называется синхронным, если при движении по круговой экваториальной орбите он остается над одной и той же точкой поверхности Земли. Найдите радиус орбиты такого спутника.

3. Пуля массой  $m$  попадает в центр лежащего на краю стола шара массой  $M$  и застревает в нем. Определите скорость шара в момент удара о пол, если пуля летела в горизонтальном направлении со скоростью  $v_0$  и высота стола  $H$ . Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. В кристалле поваренной соли NaCl атомы (ионы) Na и Cl образуют кубическую решетку (рис. 2). Определите среднее расстояние между центрами соседних ионов. Плотность поваренной соли  $\rho = 2,2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, молярная масса натрия  $M_{\text{Na}} = 23$  г/моль, хлора —  $M_{\text{Cl}} = 35,5$  г/моль.

5. В откачанный сосуд объемом  $V = 40$  л впрыснули  $m = 80$  г воды.

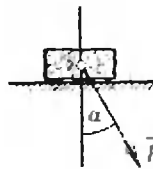


Рис. 1.

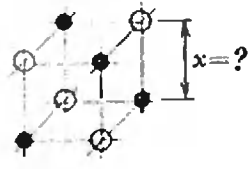


Рис. 2.

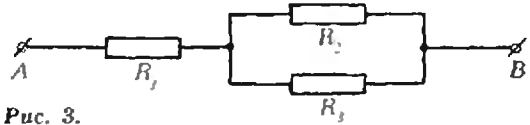


Рис. 3.

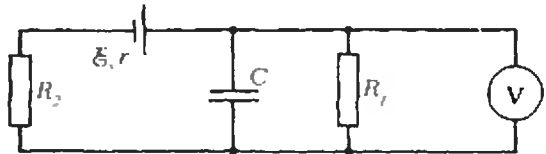


Рис. 4.

Какое давление установится в сосуде, если его нагреть до температуры  $T = 373$  К?

6. В цилиндрическом сосуде под легкоподвижным поршнем находятся  $\nu = 1,5$  моля идеального одноатомного газа при температуре  $t = 27^\circ\text{C}$ . Какое количество теплоты надо подвести к газу, чтобы его объем увеличился в 3 раза?

7. При пропускании постоянного тока по участку AB (рис. 3) на резисторе сопротивлением  $R_2$  выделяется тепловая мощность  $P_2$ . Какая тепловая мощность выделяется на каждом из резисторов сопротивлениями  $R_1$  и  $R_3$ ?

8. Конденсатор включен в цепь так, как показано на рисунке 4. Найдите заряд на конденсаторе и определите показание вольтметра, считая его идеальным.

9. Проволочный виток площадью  $S$  и сопротивлением  $R$  находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией  $B$ , изменяющейся со временем по закону  $B = B_0 \sin \omega t$  ( $B_0$  и  $\omega$  известны). Определите максимальное значение тока и тепловую мощность, выделяемую в витке. Линии индукции поля перпендикулярны плоскости витка.

10. Луч света, падая на поверхность воды, испытывает преломление и частично отражается. Определите угол падения луча, если отраженный

и преломленный лучи перпендикулярны друг другу. Коэффициент преломления воды  $n=1,33$ .

Публикацию подготовили Л. Н. Дагаева,  
Д. В. Подлесный

## Московский институт электронной техники

### Физика

#### Задачи письменного экзамена

1. Пуля летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на легком жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули  $m=5$  г, масса шара  $M=0,5$  кг. Скорость пули  $v=500$  м/с. При какой предельной длине стержня (расстоянии от точки подвеса до центра шара) шар от удара пули поднимется до верхней точки окружности?

2. Чему равна работа по подъему цепи, взятой за один конец и лежащей на плоскости, на высоту, при которой нижний конец отстоит от плоскости на расстояние, равное длине цепи? Длина цепи  $l=2$  м, масса  $m=5$  кг.

3. Некоторую массу  $m$  идеального газа с молярной массой  $M$  нагревают под поршнем так, что температура изменяется пропорционально квадрату давления от первоначального значения  $T_1$  до  $T_2$ . Определите работу, совершенную газом.

4. Определите плотность смеси, содержащей  $m_1=4$  г водорода и  $m_2=32$  г кислорода при температуре  $t=7$  °С и общем давлении  $p=10^5$  Па.

5. Два электрона находятся на бесконечно большом расстоянии друг от друга, причем первый электрон вначале покоится, а второй имеет скорость  $v_0$ , направленную к первому. Определите наименьшее расстояние, на которое они сблизятся.

6. Какое количество теплоты выделится в цепи при переключении ключа  $K$  из положения 1 в положение 2 (рис. 1)?

7. На резисторе во внешней цепи аккумулятора выделяется тепловая мощность  $P=10$  Вт. Когда к концам

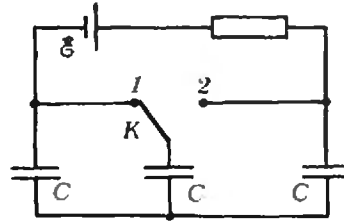


Рис. 1.

этого резистора присоединили точно такой же второй аккумулятор, выделяемая мощность стала в два раза больше. Какой будет выделяемая мощность, если к аккумуляторам одноименными полюсами присоединить третий такой же аккумулятор?

8. Вольтамперная характеристика некоторого нелинейного элемента такова, что до напряжения  $U_0=100$  В ток через элемент отсутствует, а затем линейно растет с ростом напряжения (рис. 2). При подключении элемента к батарее с внутренним сопротивлением  $r=2,5$  кОм через элемент течет ток  $I_1=2$  мА, а при подключении его к той же батарее через резистор сопротивлением  $R=25$  кОм течет ток  $I_2=1$  мА. Определите ЭДС батареи.

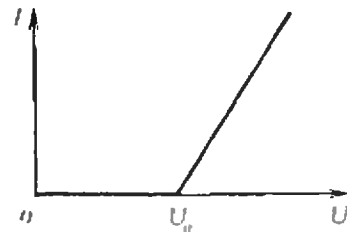


Рис. 2.

9. От источника света на плоское зеркало падает расходящийся под углом  $\alpha$  пучок лучей. Определите угол между лучами после их отражения от зеркала.

10. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F=30$  см и плоского зеркала, находящегося на расстоянии  $l=15$  см от линзы. Определите положение изображения, даваемого этой системой, если предмет находится на расстоянии  $d=15$  см перед линзой.

Публикацию подготовили А. Т. Берестов,  
Г. М. Гусаков



# Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина

## Физика

### Письменный экзамен

#### Вариант 1

1. Пешеход переходил дорогу со скоростью  $v=4,2$  км/ч по прямой, составляющей угол  $\alpha=30^\circ$  с направлением дороги, в течение одной минуты. Определите ширину дороги.

2. Человек массой  $M=60$  кг, стоя на коньках, бросает перед собой горизонтально груз массой  $m=2$  кг со скоростью  $v=3$  м/с, а сам откатывается назад. Через сколько секунд после броска человек остановится, если коэффициент трения коньков о лед  $\mu=0,01$ ? Ускорение силы тяжести принять равным  $g=10$  м/с<sup>2</sup>.

3. Во сколько раз период обращения спутника, движущегося на расстоянии  $h_1=21\,600$  км от поверхности Земли, больше периода обращения спутника, движущегося на расстоянии  $h_2=600$  км от ее поверхности? Радиус Земли принять равным  $R=6400$  км.

4. Два шара диаметром  $d=60$  см каждый скреплены в точке касания их поверхностей. На каком расстоянии от точки касания находится центр тяжести системы, если масса одного шара в 3 раза больше массы другого?

5. Абсолютную температуру газа, находящегося в цилиндре под поршнем, увеличили в 3 раза. Для того чтобы поршень остался в прежнем положении, на него пришлось положить груз массой  $m=10$  кг. Площадь поршня  $S=0,001$  м<sup>2</sup>. Ускорение силы тяжести  $g=10$  м/с<sup>2</sup>. Найдите начальное давление газа.

6. Какое давление производят пары ртути в баллоне ртутной лампы объемом  $V=3 \cdot 10^{-5}$  м<sup>3</sup> при  $T=300$  К, если в ней содержится  $N=10^{18}$  молекул ртути? Постоянная Больцмана  $k=1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

7. Напряженность электрического поля плоского воздушного конденсатора емкостью  $C=4$  мкФ равна

$E=1000$  В/м. Расстояние между обкладками конденсатора  $d=1$  мм. Определите энергию электрического поля конденсатора.

8. Вольтметр со шкалой, рассчитанной на  $U=100$  В, имеет внутреннее сопротивление  $r=10$  кОм. Какую наибольшую разность потенциалов можно измерить этим прибором, если присоединить к нему последовательно добавочное сопротивление  $R=90$  кОм?

9. В однородном магнитном поле находится плоский виток площадью  $S=10$  см<sup>2</sup>, расположенный перпендикулярно линиям поля. Какой величины ток потечет по витку, если индукция поля будет убывать с постоянной скоростью  $\Delta B/\Delta t=0,01$  Тл/с? Сопротивление витка  $R=1$  Ом.

10. Монохроматический свет падает перпендикулярно плоскости прозрачной дифракционной решетки. Под каким углом будет наблюдаться первый главный максимум зеленой линии спектра ртутной лампы (с длиной волны  $\lambda=546$  нм), если период дифракционной решетки  $d=10,92 \times 10^{-7}$  м?

#### Вариант 2

1. На сколько метров путь, пройденный свободно падающим телом за десятую секунду, больше пути, пройденного телом в предыдущую секунду? Начальная скорость тела равна нулю. Ускорение силы тяжести принять равным  $g=10$  м/с<sup>2</sup>.

2. Два одинаковых шара массой  $m=4$  кг каждый сталкиваются и начинают двигаться вместе. Какое количество теплоты выделилось при ударе шаров, если один из них имел до удара скорость  $v=5$  м/с, а второй был неподвижен?

3. Камень массой  $m=0,5$  кг, привязанный к веревке длиной  $l=50$  см, вращается в вертикальной плоскости. Натяжение веревки в нижней точке окружности  $T=45$  Н. На какую высоту, отсчитываемую от нижней точки окружности, поднимется камень, если веревку перерезать в тот момент, когда скорость камня направлена вертикально вверх? Ускорение силы

тяжести принять равным  $g=10 \text{ м/с}^2$ .

4. На сколько плотность некоторого тела больше плотности воды, если это тело в воде весит в 9 раз меньше, чем в воздухе? Плотность воды  $\rho_w=1000 \text{ кг/м}^3$ .

5. В баллоне содержится  $m=2 \text{ кг}$  газа при  $T_1=270 \text{ К}$ . Какое количество газа (в граммах) нужно удалить из баллона, чтобы при температуре  $T_2=300 \text{ К}$  давление осталось прежним?

6. Газ, совершающий цикл Карно в идеальной тепловой машине, 70 % количества теплоты, полученного от нагревателя, отдает холодильнику; температура нагревателя  $T_1=430 \text{ К}$ . Определите температуру холодильника.

7. Во сколько раз увеличится емкость плоского воздушного конденсатора, пластины которого расположены вертикально, если конденса-

тор погрузить до половины в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon=5$ ?

8. Сколько элементов тока нужно соединить параллельно в батарею, чтобы при подключении к ней резистора сопротивлением  $R=49 \text{ Ом}$  получить в цепи ток  $I=2 \text{ А}$ ? ЭДС каждого элемента  $\mathcal{E}=100 \text{ В}$ , внутреннее сопротивление  $r=2 \text{ Ом}$ .

9. Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле индукцией  $B=0,02 \text{ Тл}$ , имея импульс  $P=6,4 \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ . Найдите радиус этой окружности. Заряд электрона  $e=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ .

10. Сколько процентов от скорости света в вакууме должна составлять скорость протона, движущегося в ускорителе, чтобы увеличение его массы составило 25 %?

Публикацию подготовил Д. Д. Ходкевич

*Ответы,  
указания,  
решения*

Московский авиационный  
монологический институт  
им. К. Э. Циолковского

Математика

Вариант 1

1.  $\left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$ .

2.  $[-2; 1-\sqrt{7}] \cup [1+\sqrt{7}; 4]$ .

3.  $x_1 = \frac{\pi}{8} (2n+1)$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{6} (6k \pm 1)$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

4. (5; 7), (3; -1).

5.  $8\sqrt{14/15}$ .

Вариант 2

1.  $[-(1+\sqrt{13})/2; (-1+\sqrt{13})/2]$ .

2.  $\{(2; 1); (-2; -1); (4/\sqrt{3}; -5/\sqrt{3}); (-4\sqrt{3}; 5\sqrt{3})\}$ .

3.  $x_1 = \frac{\pi}{84} (12n-1)$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{48} (12m+7)$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

4. Промежутки возрастания  $(-\infty; -1-\sqrt{15})$  и  $(-1+\sqrt{15}; +\infty)$ , промежутки убывания  $(-1-\sqrt{15}; -1)$  и  $(-1; -1+\sqrt{15})$ .

5.  $\sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ . Указание. Высота разбивает прямоугольный треугольник на два подобных треугольника, площади которых относятся к площади данного как квадраты периметров.

Вариант 3

1.  $\{(2; 2)\}$ . 2.  $(1/10; 10)$ . 3.  $n=12$ .

4.  $x = \frac{\pi}{4} (4n+1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 5.  $\pi/2, \pi/6, \pi/3$ . Указание. Пусть  $ABC$  — данный треугольник,  $BD$  — медиана,  $BE$  — высота,  $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC = \alpha$ . Тогда  $\text{tg } 2\alpha = AE/BE = 3DE/BE = 3 \text{ tg } \alpha$ , откуда  $\text{tg } \alpha = 1/\sqrt{3}$ .

Физика

1.  $F_c = m(g - 2h/t^2) = 0,4 \text{ Н}$ .

2.  $t_1 = 2\left(\frac{v_0}{g} + \frac{v}{2}\right) = 8 \text{ с}$ ;  $t_2 = 2\left(\frac{v_0}{g} - \frac{v}{2}\right) = 4 \text{ с}$ .

3.  $\beta=0$  (горизонтальная составляющая скорости после удара равна нулю).

4.  $x_2 = x_1/\sin \varphi_1 = 4 \text{ см}$ ;  $x_2 = x_1 \sin \varphi_2/\sin \varphi_1 = 2,8 \text{ см}$ .

5. Холодильник потребит электроэнергию  $W = m(ct_1 + \lambda)(T_1/T_2 - 1)$ , это обойдется в сумму 0,6 коп.

6.  $U = Blv = 0,1 \text{ В}$ .

7.  $\Delta t = 1/(4v) = 5 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ .

8. Изображение движется вертикально вверх со скоростью  $v = 3 \text{ м/с}$ .

9.  $l = h + 2H/n = 5 \text{ м}$ .

10.  $v = c \sin(\alpha + \beta)/(\sin \alpha + \sin \beta) = 2,2 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

Московское высшее техническое  
училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. 24 км/ч, 72 км/ч.

$$2. x_1 = \frac{\pi}{2} (4k+1), x_2 = \frac{\pi}{3} (6n \pm 1), k, n \in \mathbb{Z}.$$

3.  $\{1/2\}$ . 4.  $p \in (-2; 2]$ . Указание. Данное уравнение имеет корни, если уравнение  $(p-1)y^2 - 4z + (p+2) = 0$  имеет хотя бы один положительный корень, т. е. при  $p=1$ , а также при  $p$  удовлетворяющих одному из условий:

$$a) \frac{p+2}{p-1} < 0; \quad 6) \begin{cases} \frac{p+2}{p-1} > 0, \\ p > 1, D \geq 0. \end{cases}$$

5.  $a/3\sqrt{3}; 10a^3/81\sqrt{3}$ . Указание. Пусть  $h$  — высота призмы. Тогда ее объем  $V(h) = -2\left(\frac{a^2 h}{3} - \frac{a}{\sqrt{3}} h^2 - h^3\right)$ . Функция  $V(h)$  достигает максимума при  $h = a/3\sqrt{3}$ .

Вариант 2

1. 1; 3.

$$2. x_1 = \frac{\pi}{8} (2k+1), x_2 = \frac{\pi}{3} (3l \pm 1), k, l \in \mathbb{Z}.$$

3.  $\{3\}$ .

4.  $\{0; 1\}$ .

5.  $H/11; H\sqrt{6/11}$ . Указание. Если  $d$  — диагональ призмы, а  $h$  — ее высота, то  $d^2 = h^2 + (H-h)^2 + (3h-H)^2$ .

Физика

$$1. v = v_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + \left(\sin \alpha - \frac{gs}{v_0^2 \cos \alpha}\right)^2} \approx 7,6 \text{ м/с};$$

$$\beta = \arctg\left(\tg \alpha - \frac{gs}{v_0^2 \cos^2 \alpha}\right) \approx 22^\circ.$$

$$2. h = \Delta P^2 / (8m^2 g) = 1,28 \text{ м}.$$

$$3. W = (Mg + m(g-a))^2 / (2k).$$

$$4. v_2/v_1 = \sqrt{p_2/p_1} = 10.$$

$$5. q = -2F/(E_2 - E_1) = -7 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}.$$

$$6. W_B = W_A + 0,5(3mg - F)R = -4 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

$$7. R = 2\mathcal{E}_2 r / (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = 1 \text{ Ом}.$$

$$8. A = e^2 / (8\pi\epsilon_0 r) = 21,8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 13,6 \text{ эВ}$$

(здесь  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл — заряд электрона,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м — электрическая постоянная).

9. Это нейтрон  ${}^1_0\text{n}$ , протон  ${}^1_1\text{p}$  и альфа-частица  ${}^4_2\text{He}$ .

10. Незвестная частица — это ядро атома гелия  ${}^4_2\text{He}$ ; полная энергия  $E = E_0 (m/M) N_A \approx 8,5 \cdot 10^{11}$  Дж (здесь  $M = 2 \cdot 10^{-3}$  кг/моль — молярная масса дейтерия,  $N_A = 6 \cdot 10^{23}$  моль $^{-1}$  — число Авогадро).

Физический станконструментальный институт

Математика

Вариант 1

1.  $\{2\}$ . 2.  $\{-7; -3\}$  и  $\{3; 7\}$ . 3. 21 ч.

$$4. x_1 = \pi m/2, x_2 = \pi(2k+1)/2, m, k \in \mathbb{Z}.$$

5.  $S\sqrt{3} \tg \varphi (2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha+\beta))^{-1/2}$ . Указание. Если  $R$  — радиус окружности, описанной около основания, а  $H$  — высота призмы, то  $H = R \tg \varphi$ , а  $S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha+\beta)$ .

Вариант 2

1.  $\{1/16; 1\}$ . 2.  $k = 13$ . 3.  $68/3$  км/ч.

$$4. x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$5. l \sin \alpha \sqrt{2}/(\sqrt{2} + \tg \alpha).$$

Физика

1.  $\alpha \leq \arctg \mu \approx 0,15 \text{ рад} \approx 9^\circ$ .

2.  $R = \sqrt[3]{g \left(\frac{R_3 T_3}{2\pi}\right)^2} = 42400 \text{ км}$ , где  $R_3 = 6400 \text{ км}$  — радиус Земли,  $T_3 = 24 \text{ ч}$  — период ее вращения вокруг собственной оси.

$$3. v = \sqrt{\left(\frac{mv_0}{m+M}\right)^2 + 2gH}.$$

$$4. x = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{Na}} + M_{\text{Cl}}}{2\rho N_A}} = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

5.  $p = 10^5$  Па (в сосуде находится смесь воды и ее насыщенных паров).

$$6. Q = 5\sqrt{RT} = 18,7 \text{ кДж}.$$

$$7. P_1 = P_2 R_1 (R_2 + R_3)^2 / (R_2 R_3^3);$$

$$P_3 = P_2 R_2 / R_3.$$

$$8. q = C\mathcal{E} R_1 / (R_1 + R_2 + r);$$

$$U_V = \mathcal{E} R_1 / (R_1 + R_2 + r).$$

$$9. I_m = B_0 \omega S / R; P = (B_0 \omega S)^2 / (2R).$$

$$10. \alpha = \arctg n = 53^\circ.$$

Физический институт  
электронной техники

$$1. l = \frac{m^2 v^2}{4g(m+M)^2} = 0,62 \text{ м}.$$

$$2. A = 3mgl/2 = 150 \text{ Дж}.$$

$$3. A = mR(T_2 - T_1)/(2M).$$

$$4. \rho = \frac{(m_1 + m_2) p}{(m_1/M_1 + m_2/M_2) RT} \approx 0,51 \text{ кг/м}^3.$$

$$5. r_{\min} = e^2 / (4\pi\epsilon_0 m v^2).$$

$$6. Q = C\mathcal{E}^2/3.$$

$$7. P' = P(1 + \sqrt{2})^2 / (1 + \sqrt{2}/3)^2 \approx 27 \text{ Вт}.$$

$$8. \mathcal{E} = U_0 + I_1 I_2 R / (I_1 - I_2) = 150 \text{ В}.$$

$$9. \gamma = \alpha.$$

10. Изображение находится на расстоянии 60 см перед линзой.

Физический институт нефти  
за им. И. М. Губкина

Вариант 1

$$1. d = v \sin \alpha \cdot t = 35 \text{ м}.$$

$$2. t = mv / (\mu Mg) = 1 \text{ с}.$$

$$3. T_1/T_2 = \sqrt{(R+h_1)^3 / (R+h_2)^3} = 8.$$

$$4. x = d/4 = 0,15 \text{ м}.$$

$$5. p = mg/(2S) = 50 \text{ кПа}.$$

$$6. p = NkT/V = 138 \text{ Па}.$$

$$7. W = C(Ed)^2/2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

$$8. U' = U(r+R)/r = 1000 \text{ В}.$$

$$9. I = (\Delta B/\Delta t) S/R = 10^{-5} \text{ А}.$$

$$10. \varphi = \arcsin(\lambda/d) = 30^\circ.$$

Вариант 2

$$1. \Delta l = gt^2(10^2 - 2 \cdot 9^2 + 8^2)/2 = 10 \text{ м}.$$

$$2. Q = mv^2/4 = 25 \text{ Дж}.$$

$$3. H = \frac{l}{2} \left(\frac{T}{mg} - 1\right) = 2 \text{ м}.$$

$$4. \Delta p = \rho_B/8 = 125 \text{ кг/м}^3.$$

$$5. \Delta m = m(1 - T_1/T_2) = 200 \text{ г}.$$

$$6. T_2 = 0,7 T_1 = 301 \text{ К}.$$

$$7. C_2/C_1 = (1 + \epsilon)/2 = 3.$$

$$8. n = Ir/(I - IR) = 2.$$

$$9. R = P/(eB) = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2 \text{ см}.$$

$$10. \alpha = 60^\circ.$$



**«Квант» для младших школьников**  
**«Квант» № 4)**

1. Цифры, отличной от 3, быть не может, так как  $2^n \cdot 5^n = 10^n$ , т. е. произведение  $2^n \cdot 5^n$  начинается со 100. Проще всего проверить все возможные цифры: 1, 2, ..., 9.

2.  $264^2 = 69696$ .

3. Если обозначить число обезьян через  $x$ , а количество собранных каждой из них орехов через  $y$ , то получится, что обезьяны собрали  $xy$  орехов. Каждая обезьяна бросила по  $(x-1)$  орехов; всего же было брошено  $x(x-1)$  орехов. Таким образом, они принесли  $xy - x(x-1)$  орехов, и мы получаем уравнение  $x(y-x+1) = 33$ . Отсюда следует, что  $x$  — делитель числа 33. Так как  $x \neq 1$  и  $x \neq 33$ , то  $x = 3$  или  $x = 11$ . В первом случае  $y-x+1 = 11$  и  $y = 13$ , во втором случае  $y-x+1 = 3$  и  $y$  тоже равно 13.

4. В описанной ситуации «восточные» оконные стекла в домах ориентированы примерно параллельно друг другу. Поэтому они могут фактически рассматриваться как части одного большого зеркала. В таком зеркале по мере восхода солнца мы видим светило все выше и выше, т. е. «светящиеся» окна должны перемещаться вверх по склону горы. Кроме того, как нетрудно заметить, в северном полушарии они немного смещаются на юг, а если город находится в южном полушарии — на север. На экваторе в дни весеннего и осеннего равноденствий бокового смещения нет.

5. Перегнем наш четырехугольник по сторонам прямоугольника так, чтобы «выступающие» уголки четырехугольника оказались внутри прямоугольника.

Поскольку у прямоугольника углы — прямые, оба отрезка любой стороны четырехугольника после перегибания будут располагаться на одном луче, исходящем из соответствующей вершины прямоугольника (рис. 1).

Из равенства  $AX = BX$  следует, что точки  $A$  и  $B$  переходят в одну и ту же точку  $E$ , а

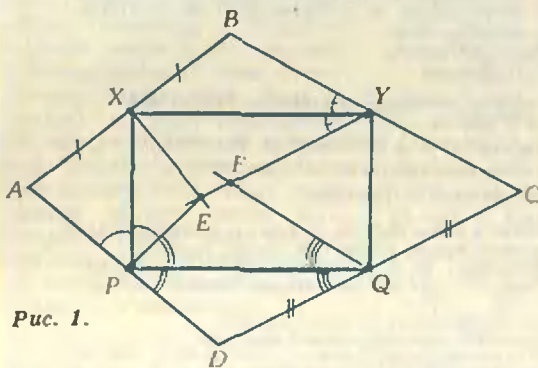


Рис. 1.

из равенства  $DQ = CQ$  — что точки  $C$  и  $D$  переходят в некоторую точку  $F$ . Из равенства углов  $EPQ$  и  $DPQ$  следует, что точка  $F$  лежит на прямой  $PE$ , а из равенства углов  $BUX$  и  $XUY$  — что точка  $F$  лежит на прямой  $YE$ . Если прямые  $PE$  и  $YE$  не совпадают, то точка  $F$  совпадает с точкой  $E$  пересечения этих прямых (рис. 2, а). Если же прямые  $PE$  и

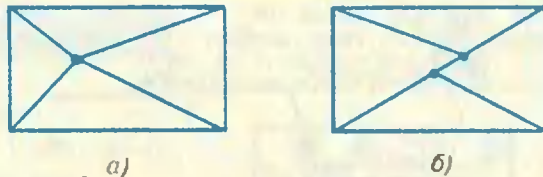


Рис. 2.

УЕ совпадают, то получаем расположение, показанное на рисунке 2, б. Из этих рисунков видно, что площадь треугольника действительно равна половине площади четырехугольника.

**«Телескоп «Кванта»**  
**«Квант» № 4)**

**Вопросы и задачи**

1. Первая катушка покатится вправо, вторая — влево.
2. Не нарушится.
3. См. рис. 8.

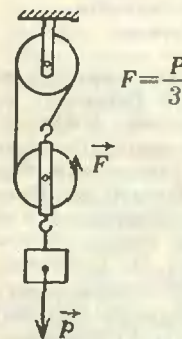


Рис. 3.

4. Нет, поскольку сила  $F_3$  не создает момента относительно точки  $O$ .
5. Сдвинется левый брусок (см. рис. 4, вид сверху).

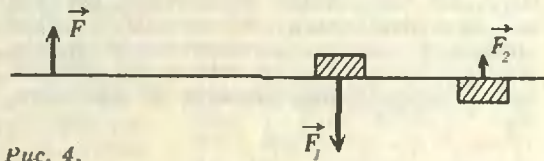


Рис. 4.

6. Применение веревки, перекинутой через бочку, дает выигрыш в силе в два раза, наклонная плоскость (при  $\alpha = 30^\circ$ ) — также в два раза; следовательно, общий выигрыш в силе — в четыре раза.
7. Да, примерно в два раза.
8. См. рис. 5.

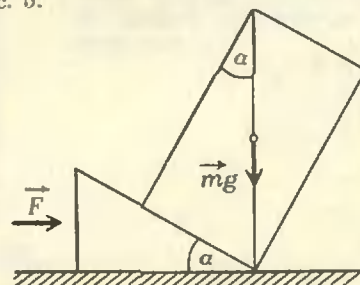


Рис. 5.

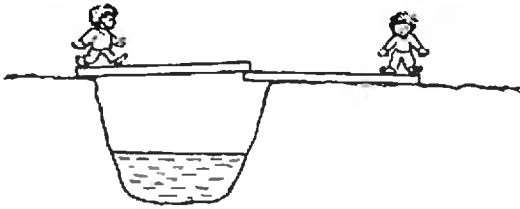


Рис. 6.

9. При выполнении неравенства  $2lg \geq h$ , где  $r$  — радиус винта,  $h$  — его шаг.  
10. См. рис. 6.

**Микроопыт**

При сгибании конца полоски ее центр тяжести сместится и не будет совпадать с точкой опоры. Полоска упадет.

**Победители шахматного  
курса 1987 года**

Победителями конкурса признаны: В. Арушанян (Гатчина), Э. Бабаев (с. Чопадара АзССР), С. Байчан (Ульгей, МНР), Е. Борзых (Прокопьевск), В. Васильев (Свердловск), К. Ворошилин (Орск), Р. Гашимов (п. Борадыгах АзССР), С. Дорошев (Шатура), М. Исаков (Мингечаур), А. Истер (Вишневое Киевской обл.), С. Катаргин (Омутнинск), И. Кваша (Новочеркасск), С. Киречко (Жданов), М. Клочихин (Архангельск), Д. Красиков (Ростов-на-Дону), М. Куперман (Москва), В. Медведев (Москва), В. Москваленко (Ворошиловград), Ю. Петренко (Желтые Воды), В. Попов (с. Субботино Красноярского края), С. Рудаков (Гусев), А. Рябов (Куйбышев), С. Тасмуратов (Астрахань), А. Тихоиков (д. Моисеевка Гомельской обл.), С. Харченко (Кировоградская обл.), В. Чебкасов (Куйбышев). Редакция поздравляет победителей. Все они награждаются дипломами и значками журнала «Квант» и шахматно-математической литературой, а также получают право на присвоение соответствующих разрядов по шахматам.



Главный редактор —  
академик Ю. А. Оснпьян

Заместители главного редактора:  
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,  
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

**Редакционная коллегия:**

А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,  
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,  
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,  
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,  
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбиллин,  
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,  
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,  
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,  
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,  
В. Г. Разумовский, И. А. Родина, Н. Х. Розов,  
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,  
А. Б. Сосинский, В. М. Уров, В. А. Фабрикант

**Редакционный совет:**

А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,  
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,  
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,  
А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,  
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,  
В. В. Можяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,  
Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко,  
И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,  
В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

**Номер подготовили:**

А. Н. Виленикин, А. А. Егоров, Л. В. Кардашевич,  
И. Н. Клузова, Т. С. Петрова,  
А. В. Сосинский, В. А. Тихомирова

**Номер оформили:**

Е. П. Давелия, М. В. Дубах, С. В. Иванов,  
Д. А. Крымов, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева,  
Е. К. Тенчурнина, И. Е. Смирнова, П. И. Чернуцкий,  
В. Б. Юдин  
Фото представили:  
Е. П. Давелия

Редактор отдела художественного оформления  
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Н. В. Румянцева

Сдано в набор 16.03.88. Подписано к печати 25.04.88.  
Т-09578 Бумага 70×100/16. Печать офсетная  
Усл. кр.-от. 22,10. Усл. печ. л. 5,2. Уч.-над. л. 6,27.  
Тираж 197 262 экз. Цена 40 коп. Заказ 637

Ордена Трудового Красного Знамени  
Чеховский полиграфический комбинат  
ВО «Союзполиграфпром»  
Государственного комитета СССР  
по делам издательства, полиграфии  
и книжной торговли  
142300, г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,  
«Квант», тел. 250-33-54

# Шахматная страничка

## СЕРИЙНЫЕ КВАРТЕТЫ

Какие только сюжеты не придумывают шахматные композиторы-фантасты! Сегодня мы остановимся на так называемых серийных задачах (см. также «Квант», 1986, № 4). В них ходит только одна сторона, обычно — белые. Задача состоит в том, чтобы поставить мат черному королю или запатовать его. При этом в искомой серии ходов белых не должно быть ни одного шаха. Известны два типа серийных задач. В первом из них на доске много фигур и надо разобраться в этом клубке, найти хитроумную серию ходов, ведущих к цели. В задачах второго типа, о которых как раз и пойдет сейчас речь, из небольшого фиксированного набора фигур требуется сконструировать позицию, в которой белые ставят серийный мат в максимально возможное число ходов. Но надо учитывать, что серийная задача считается корректной лишь в том случае, если существует единственная серия ходов, которая ведет к мату (в заданное число ходов).

Мы рассмотрим всевозможные наборы четырех фигур — два короля и по одной фигуре с каждой стороны, то есть квартеты на шахматной доске. Поскольку у белых и черных имеется по королю, остается выбор из пяти фигур (ферзь, ладья, слон, конь и пешка), и всего получается 25 возможных видов квартетов. Однако в трех случаях мат невозможен: белый слон против черного ферзя или ладьи и белый конь против черного ферзя. Приведем все 22 рекордных квартета, некоторые — с решениями.

1. Белые: Кра1, Фб2; черные: Крг8, п. с3. Серийный мат в 7 ходов. 1—6. Крг6 7. Фб8×. Положение пешки на с3 существенно, иначе было бы два решения (7. Фг7×).

2. Белые: Кра1, Фб2; черные: Крг8, Кх8 (7 ходов). Предыдущий маршрут короля не проходит, так как поле

g6 под боем. 1. Фб7 2—6. Крг6 7. Фг7×.

3. Белые: Крп1, Фг1; черные: Крб8, Сб7 (8 ходов). Король белых под шахом, но это не запрещено, первым ходом они, как и положено, избавляются от шаха. 1. Фг2! 2—7. Крг1—b6 8. Ф:b7×.

4. Белые: Крп1, Фд3; черные: Кра4, Лс2 (7 ходов). 1—6. Крд1:c2—с3 7. Фа6×.

5. Белые: Крп1, Фh4; черные: Кра6, Фг3 (7 ходов). 1. Ф:g3 2—6. Крс6 7. Фа3×.

6. Белые: Крп1, Лг2; черные: Кра6, п. d7 (8 ходов). 1—7. Крп2—d6:d7—с6 8. Ла2×.

7. Белые: Крп7, Лг6; черные: Крб1, Кд2 (8 ходов).

8. Белые: Кра1, Лb2; черные: Крп6, Чh8 (12 ходов). 1—11. Кра2—g8:h8—g8—f6 12. Лh2×.

9. Белые: Крп8, Ла7; черные: Крб1, Лг1 (8 ходов). 1. Лг7! 2—7. Крг8—b3 8. Л:g1×.

10. Белые: Крп1, Лf8; черные: Кра6, Фf2 (7 ходов). 1. Л:f2 2—6. Крс6 7. Ла2×.

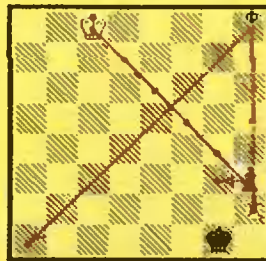
11—13. Белые: Кра2, Чh6; черные: Крп8, п. h7 (или Кh7, Чh7; 6 ходов). 1—5. Крf7 6. Сg7×.

14. Белые: Кра3, Кh6; черные: Крп8, п. h7 (6 ходов). 1—5. Крf8 6. Кf7×.

15. Белые: Кра2, Кh4; черные: Крп8, Кh7 (6 ходов). 1—5. Крf7 6. Кg6×.

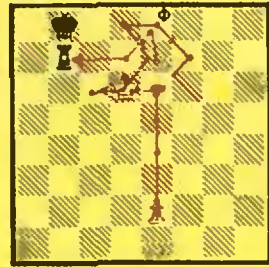
16. Белые: Кра3, Кd8; черные: Крп8, Чh7 (6 ходов). 1—5. Крf8 6. Кf7×.

17. Белые: Крп3, Кf5; черные: Крп8, Лh7 (8 ходов). 1. Крг4 2. Ке7 3—7. Крд7—e8—f8 8. Кg6×.

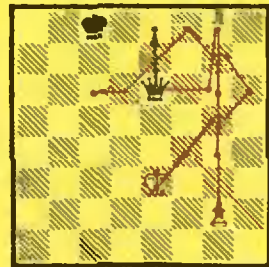


18—19. (На h3 — пешка или конь; 12 ходов).

20. Белые: Крб8, п. h2; черные: Крг1, Чh3 (13 ходов). 1—7. Крf4—g3:h3—g3 8—12. h4—h8Ф 13. Фа1×.



21. (14 ходов). Весьма сложная траектория фигур. Пешка не может просто превратиться в ферзя, так как черный король окажется под шахом. Белый король должен сначала прийти на d8, но мешает черная ладья. Пешка и король действуют сообща. 1—4. e4—e7 5—8. Кре6—f7—e8—d8 9. e8Ф 10. Фd7 11—13. Крe7—d6—с6 14. Ф:b7×.



22. (Суперрекорд: 16 ходов). Только при данном наборе фигур удалось добиться такого марафонского решения. 1. Крf4 2—4. g4—g6 5—9. Крf4—h6—f8 10. g8Л! 11—12. Лg6:e6 13—15. Кре7—d6—с6 16. Лс8×.

Приведенные рекорды принадлежат композиторам-фантастам разных стран — Югославии, Англии, ФРГ. Однако вполне вероятно, что некоторые из этих рекордов можно побить. Попробуйте сделать это!

Е. Я. Гук



Цена 40 коп.

Индекс 70465

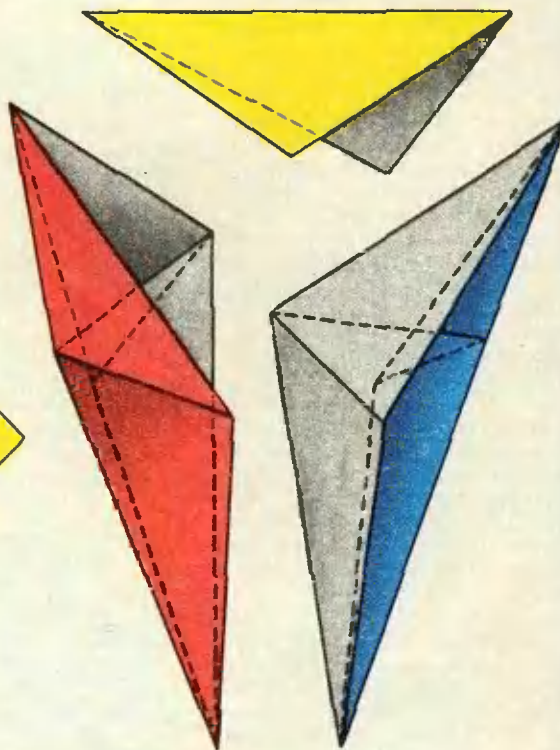
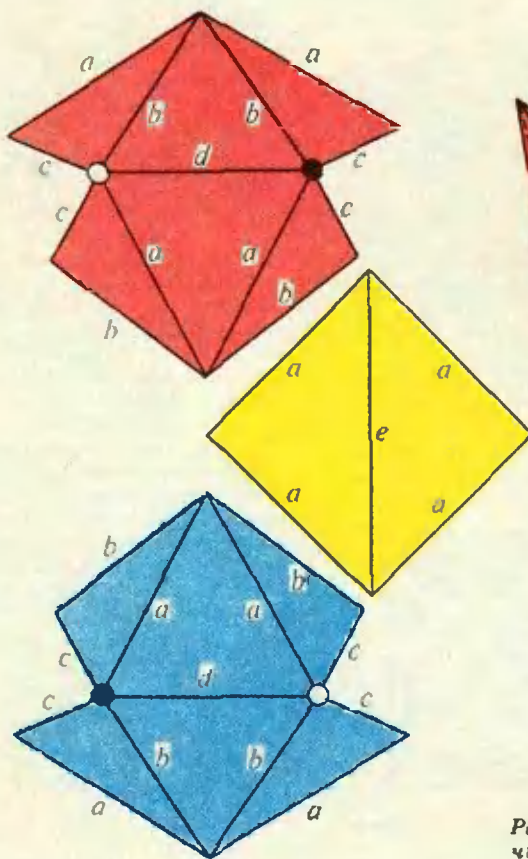
Можно ли непрерывно деформировать многогранник так, чтобы при этом все его грани оставались неизменными, а изменялись лишь двугранные углы? Иными словами — можно ли многогранник изгибать? Оказывается — можно.

На первой странице обложки изображен, по-видимому, наиболее простой известный изгибаемый многогранник — флексор, который предложил Клаус Штеффен, и зеркальный образ этого флексора.

Развертка этого флексора состоит из двух равных оснований и крышки (см. рисунок). В качестве значений  $a, b, c, d, e$ , хорошо подходят  $a=12, b=10, c=5, d=11, e=17$ . После того как вырезано основание, нужно склеить попар-

но ребра  $c$  так, чтобы в одной вершине (отмеченной светлым кружком) основание было выпуклым в одну сторону, а в другой вершине (отмеченной темным кружком) — в противоположную, так что в целом основание не является выпуклым.

Второе основание склеивают точно так же, поэтому оба основания могут быть совмещены друг с другом. После этого основания склеиваются так, что у каждого из них остается по два свободных ребра, а эти четыре ребра заклеиваются крышкой. Полученный многогранник-флексор непрерывно изгибает: его можно немного сжимать и разжимать, изменяя двугранные углы при ребрах.



Разрежьте → изогните → склейте — и вы получите флексор Штеффена.